Baccalauréat spécialité

Thème : Suites numériques

Sujets depuis 2021

Table des matières

1 Amérique du Nord – mai 2021

EXERCICE 2 **5 points**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace() :
    u = 0,6
    n = 0
    while u > 0,02 :
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2 Polynésie – 2 juin 2021

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2. **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

3 Polynésie – 2 juin 2021

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

4 Asie – Jour 1 – 7 juin 2021

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
    u = 1 000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. **a.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = -1500$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

Déterminer cette année.

5 Asie – Jour 2 – 8 juin 2021

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

6 Centres étrangers candidats libres – Jour 1 – 9 juin 2021

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

7 Centres étrangers candidats libres – Jour 1 – 9 juin 2021

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

8 Centres étrangers candidats libres – Jour 2 – 10 juin 2021

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

9 Métropole – Jour 1 — 7 juin 2021

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3$ °C.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)\,.$$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$

2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

- **a.** Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
- **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
- **c.** En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

7.
- **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
- **b.** Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n=0
    T= ........................
    while T ..................
        T= ................
        n=n+1
    return
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : Exercice A ou Exercice B

Pour éclairer le choix, les principaux domaines abordés sont indiqués en début de chaque exercice.

10 Métropole – Jour 2 – 8 juin 2021

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

En déduire la limite de la suite (u_n).

11 Métropole – jour 1 – 13 septembre 2021

Exercice 2, commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3. **a.** Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
   u = 0,5
   n = 0
   while ......................
      u = ......................
      n = n + 1
   return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

12 Métropole – jour 1 – 13 septembre 2021

Exercice A

Principaux domaines abordés : Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5\,;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

- **a.** Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,1$.
  En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
- **b.** Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3.
- **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
- **b.** En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.

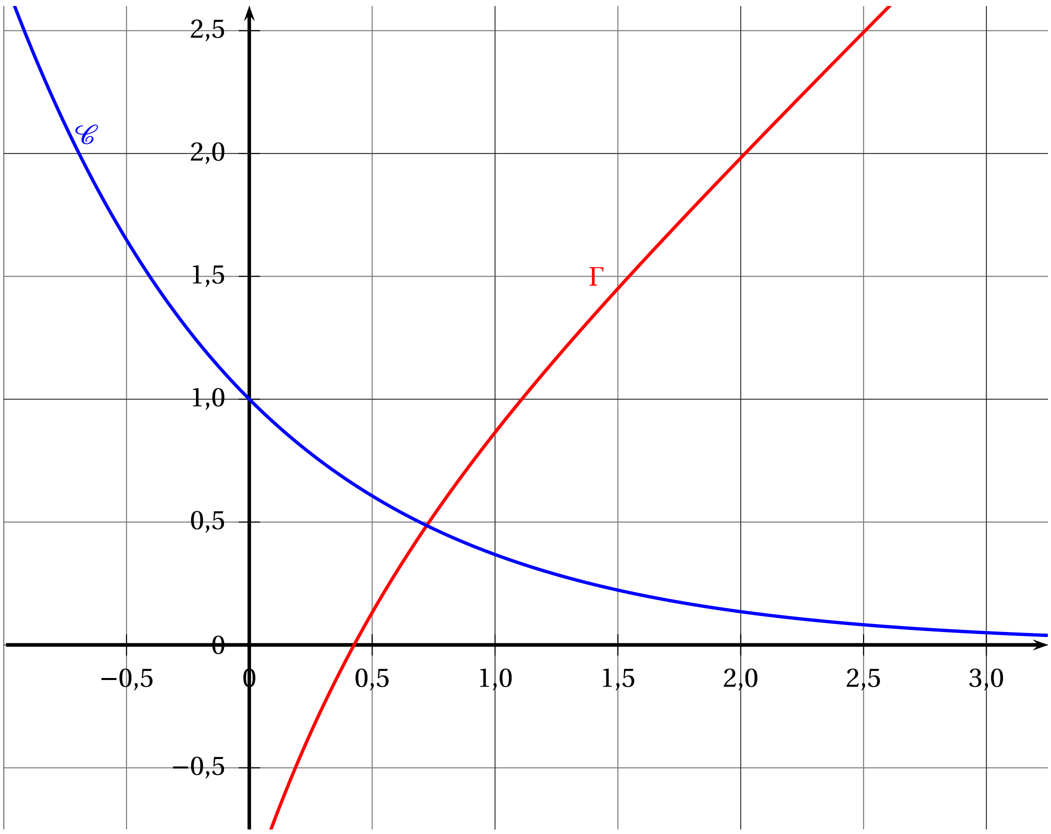
- **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
  En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4.
- **a.** Démontrer que $\ell = \ell'$.
- **b.** On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
  Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
  En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
- **c.** Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

13 Métropole – jour 1 – 13 septembre 2021

Exercice 3



14 Polynésie – Jour 1 – 4 mai 2022

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : suites**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. **a.** Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1.  def liste(k) :
2.      L = []
3.      u = ...
4.      for i in range(0, k+1) :
5.          L.append(u)
6.          u = ...
7.      return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5. **a.** Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

15 Polynésie – Jour 2 – 5 mai 2022

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : suites, fonctions**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n(200-u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;100]$ par $f(x) = 0,008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0;100]$ l'équation $f(x) = x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;100]$ et dresser son tableau de variations.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
        n =n+1
        u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

16 Asie – Jour 1 – 17 mai 2022

EXERCICE 2 **7 points**

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

   a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

   c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.

   D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.

La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, par

$$f(t) = 2,5 - 1,5\mathrm{e}^{-0,2t},$$

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.

On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?

2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.

3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4. b. du modèle discret de la Partie A.

17 Asie – Jour 2 – 18 mai 2022

EXERCICE 4 **7 points**

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   - **a.** Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
   - **b.** Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
   - **c.** Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

2.
   - **a.** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   - **b.** Justifier que la suite (p_n) est convergente.
3. On appelle L la limite de la suite (p_n).
   - **a.** Justifier que L est solution de l'équation

     $$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

   - **b.** Déterminer alors la limite de la suite (p_n).
4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

18 Amérique du Nord – Jour 1 – 18 mai 2022

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : suites**

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, } \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).
   c. Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
   c. Calculer la limite de la suite (T_n).
   d. Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

   a. Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
   b. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

19 Polynésie – Jour 1 – 30 août 2022

EXERCICE 2 7 points **suites, fonctions**

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

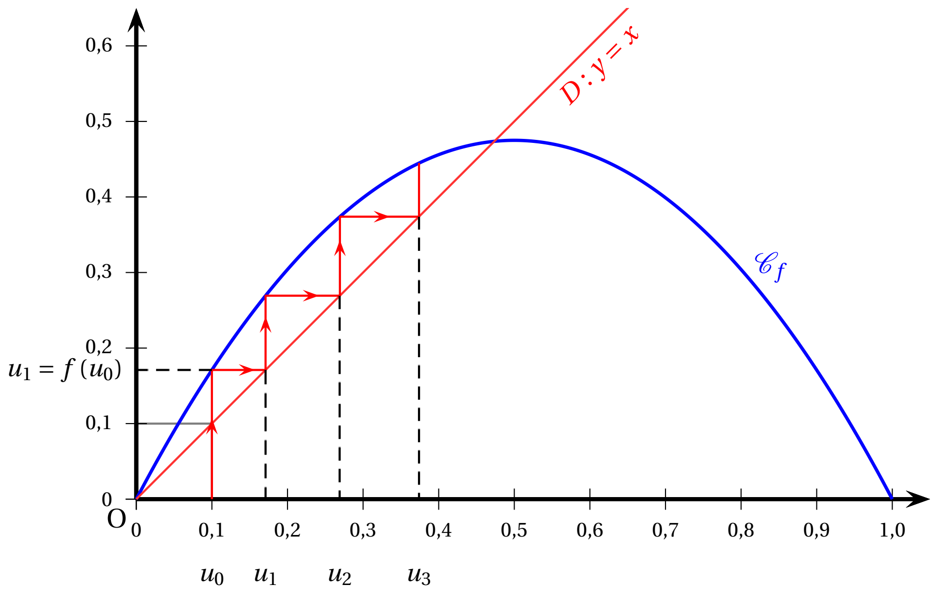
$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
   - **a.** Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   - **b.** En déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. **a.** En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   - **b.** En déduire que la suite (u_n) converge.
   - **c.** Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python `algo (p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

20 Amérique du Sud – Jour 2 – 27 septembre 2022 Jour 2

EXERCICE 3 SUITES **7 points**

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1\,000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

  a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,9$.

  b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000\,(1 + 0,9^n)$.

  c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
  En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1\,000$).

  a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1\,020$.
  Justifier la réponse par un calcul.

  b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
  Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```

21 Polynésie J1 - 13 mars 2023

EXERCICE 4 6 points **Thème : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3		-2		-1
Variations de g	||		$g(-2)$		
	|| $-\infty$	↗		↘	1

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

b. Soit n un entier naturel.

Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

22 Polynésie J2 - 14 mars 2023

EXERCICE 4 5 points **Thème : suites, fonction logarithme, algorithmique**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1. **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
2. **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente.
3. **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$.
   Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.
5. On considère la fonction **mystere** définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
   On rappelle que `len`(L) renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste L.

```
def mystere(L) :
    M = L[0]
    # On initialise M avec le premier élément de la liste L
    for i in range(len(L)) :
        if L[i] > M :
            M = L[i]
    return M
```

   Affirmation : L'exécution de **mystere**([2, 3, 7,0 ,6, 3, 2, 0, 5]) renvoie 7.

23 Métropole J1 - 20 mars 2023

EXERCICE 3 **5 points**

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?
Justifier votre réponse.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

24 Métropole J2 - 21 mars 2023

EXERCICE 2 **5 points**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   c. Déterminer la valeur de ℓ.
   Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

   a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?

   b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

25 Centres étrangers J2 - 22 mars 2023

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
   b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.
4. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on a :
   $$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$
   b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

26 Asie J1 - 23 mars 2023

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600.$$

3. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.

4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : mystere (500) ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.

Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.

Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.

Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

27 Asie J2 - 24 mars 2023

EXERCICE 3 **4 points**

*Marie Sklodowska-Curie (*1867 – 1934*) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 *et un en Chimie en* 1911 *pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.

On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. **a.** Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21} \left(0,995^n + 1\right)$.

c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.

5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1  def noyaux (n) :
2      V =6*10**21
3      L=[V]
4      for k in range (n) :
5          V= ...
6          L.append(V)
7      return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

28 Amérique du Nord J1 - 27 mars 2023

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

   Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

   b. Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

   On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

29 La Réunion J1 - 28 mars 2023

EXERCICE 3 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\dfrac{11}{4}$ **b.** $\dfrac{13}{2}$
c. 3,5 **b.** 2,7

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ **b.** géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$
c. constante. **d.** ni arithmétique, ni géométrique.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

```
1  def terme (n)
2      U=3
3      for i in range(n) :
4  ..........
5      return U
```

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne 4 par :

a. U = U/2 + (i+1)/2+1 **b.** U = U/2 + n/2 + 1
c. U = U/2 + (i−1)/2+1 **d.** U = U/2 + i/2 + 1

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$n \leqslant u_n \leqslant n+3.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.

30 Amérique du Nord J2 - 28 mars 2023

EXERCICE 2 **5 points**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;

— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;

— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700.$$

b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.

6. **a.** Déterminer la limite de la suite (a_n).

b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7. **a.** Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while ... :
        n=n+1
        A = ...
    return...
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

31 La Réunion J2 - 29 mars 2023

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **a.** Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.
- **b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

- **a.** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- **b.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

- **a.** Calculer v_0.
- **b.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.
- **c.** Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n). En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2) / (u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

32 Nouvelle-Calédonie J1 - 28 août 2023

EXERCICE 2 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.
   b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
   c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   Donner sa raison et son premier terme v_0.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

   d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.
   a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

33 Nouvelle-Calédonie J2 - 29 août 2023

EXERCICE 3 5 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
      u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

a. Donner v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

34 Polynésie - 7 sept 2023

EXERCICE 3 5 points **Thème : suites, algorithmique**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\ ;\ 2\right]$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.
Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On a donc, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.
On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.
À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

35 Métropole J2 - 12 sept 2023

EXERCICE 3 5 points

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 & = \dfrac{1}{\text{e}} \\ u_{n+1} & = \dfrac{1}{\text{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1. \end{cases}$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`..................`
L_3	`for i in range(1, n):`
L_4	`u=..................`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1+\dfrac{1}{n} \leqslant \text{e}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier votre réponse.

4. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \dfrac{n}{\text{e}^n}$.

b. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

36 Amérique du Sud J1 - 26 sept 2023

Exercice 4 **5 points**

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIXe siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Déterminer la limite de P_n.

2. Dans cette question $b = 0,2$.

a. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.

b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

37 Amérique du Sud J2 - 27 sept 2023

Exercice 3 **5 points**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit n un entier naturel.
   Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
    |    u= ...
    return u
```

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
   c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
   a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L =[]
    for i in range(n+1) :
    |    L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

   La commande « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.
   Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

   Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
   Démontrer cette conjecture.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.

38 Amérique du Nord – sujet 2 – 22 mai 2024

Exercice 3 **6 points**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g\left(u_n\right) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

39 Centres étrangers – Sujet 2 – 6 juin 2024

EXERCICE 4 **4 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n) :
    u = 5
    i = 0
    ℓ = (1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ) >= 10**(-n) :
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil` (2).

b. La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

40 Métropole – Sujet 2 – 20 juin 2024

EXERCICE 2 **5 points**

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1m^3 = 1 000 L.

Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg. L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.L^{-1}.

Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70$ mg. L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg. L^{-1}.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en mg. L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.

   On admet que pour tout entier naturel n,

   $$v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3.$$

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse,
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.
5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :
  n=0
  v=0.7
  while __________ :
      n= _____
      v= _____
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. L^{-1}, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0,08y + \frac{q}{50}$$

où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\,\text{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

   b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}.
   Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

41 Métropole – Sujet 2 (dévoilé) – 20 juin 2024

EXERCICE 3 **5 points**

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
   a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n < 2$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction `u` écrite en langage Python.
   Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?
   On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \text{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

42 Polynésie – Sujet 1 – 19 juin 2024

Exercice 4 **6 points**

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.

Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
   Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

   b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

43 Polynésie – Sujet 2 – 20 juin 2024

Exercice 3 **6 points**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ \ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.** Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u − log( u / 4 )
    return S
```

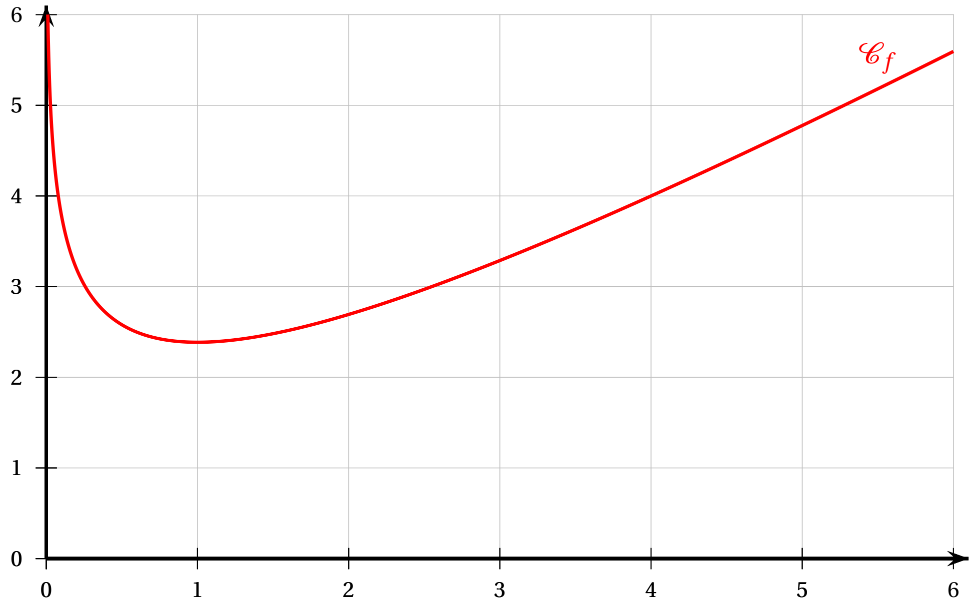
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

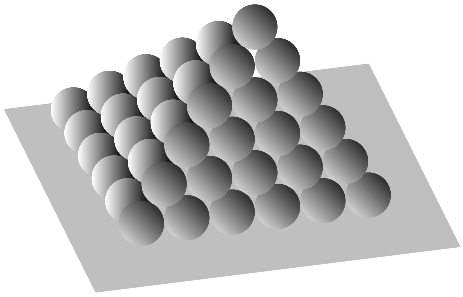
d. En déduire la valeur de ℓ.

44 Polynésie – sujet 1 – 5 septembre 2024

Exercice 3 — 4 points

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1[er] étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2[e] étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3[e] étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

45 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2025

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1$$

d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return (n,u)
```

a. Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

46 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2025

EXERCICE 2 **5 points**

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel ln(2), en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

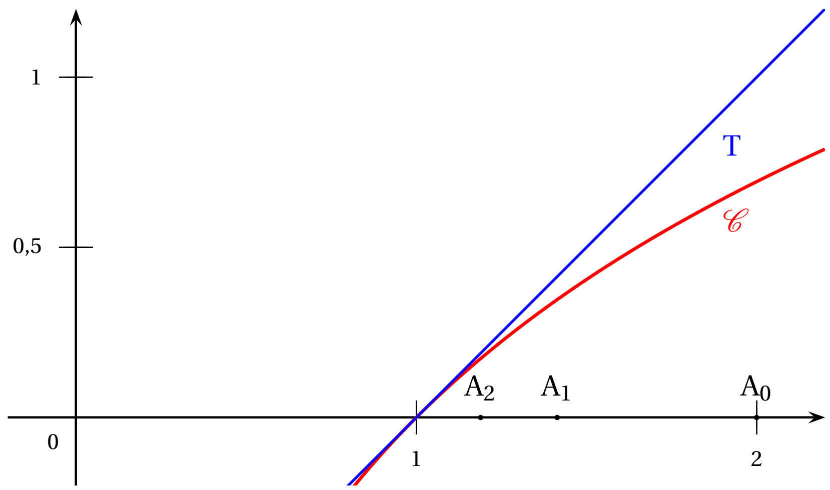
Partie A

1. **a.** Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.
   b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
   d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad \ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
   Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



   On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99\,;\,1,01[$.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99\,;\,1,01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

c. Déduire des questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.

On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =...
return L
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

47 Amérique du Nord – Sujet secours – 22 mai 2025

EXERCICE 4 **5 points**

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.

2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \dfrac{1}{4}\ell$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

48 Asie – Sujet 1 – 11 juin 2025

EXERCICE 3 **5 points**

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?

   Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
def mystere(k) :
    n = 1
    s = 2
    while s < k :
        n = n + 1
        s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
    return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

49 Asie – Sujet 2 – 12 juin 2025

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```
def suite(n) :
    U=30
    W=45
    for i in range (1,n+1) :
        U=U/2+10
        W=W/2+U/2+7
    return W
```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?

3. **a.** Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

b. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 \leqslant 10n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

50 Centres étrangers – Sujet 2 – 13 juin 2025

EXERCICE 1 **6 points**

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. **a.** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v= ...
    n = n+1
print (2025 + n)
```

51 Métropole – Sujet 1 – 17 juin 2025

EXERCICE 4 **5 points**

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0\,;20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

   On admet que h est croissante sur $[0\,;20]$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

   b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

   c. Justifier que $L = 15$.
3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

   a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

   b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
  n=0
  u= 1
  while ...... :
    n=......
    u=......
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;

- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' = 0,02y(15-y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2): \quad y' = -0,3y + 0,02.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. En déduire que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14\,\mathrm{e}^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

52 Polynésie – 2 septembre 2025

EXERCICE 3 **(5 points)**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel `k`, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def suite(k):
  L = []
  u = 5
  for i in range(......):
    L.append(u)
    u=............
  return(......)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.

Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):
  L = suite(n)
  c = 1
  for i in range(n - 1):
    if L[i] > L[i + 1]:
      c = 0
  return c
```

```
>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$$

On admet que g est dérivable sur $[2\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[\,2\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$			$\ln(6) - 1$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;\,+\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

53 Métropole/Amérique du Nord – Sujet 1 – 9 septembre 2025

Exercice 3 **6 points**

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n).
On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ.

4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python.
On rappelle que sqrt(x) renvoie la racine carrée du nombre x.

```
from math import *

def rang(a) :
  u = 6
  n=0
  while u > = a :
    u = sqrt(3*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang`(2.000001) renvoie une valeur ?

b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang`(a) renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n, entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1.

2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.

b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$$

c. Calculer la limite de (v_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2,01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1,99 ; 2,01[$.

54 Amérique du Sud – Sujet 2 – 14 novembre 2025

Exercice 3 — 4 points

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & \ln(4) \\ v_{n+1} & = & \ln\left(-1+2\,\mathrm{e}^{\,v_n}\right) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad w_n = (-1+\mathrm{e}^{\,v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

	A	B	C
1	n	v_n	w_n
2	0	1,38629436	3
3	1	1,94591015	6
4	2	2,56494936	12
5	3	3,21887582	24
6	4	3,8918203	48
7	5	4,57471098	96
8	6	5,26269019	192
9	7	5,95324333	384
10	8	6,6450909 7	768
11	9	7,33758774	1536
12	10	8,03040956	3072
13	11	8,72339402	6144
14	12	9,41645983	12288
15	13	10,1095663	24576
16	14	10,8026932	49152
17	15	11,4958302	98304
18	16	12,1889723	196608
19	17	12,8821169	393216

1. Donner les valeurs exactes de v_1 et w_0.

2. **a.** Une partie d'une feuille de calcul où figurent les indices et les termes des suites (v_n) et (w_n) est reproduite ci-contre.

Parmi les trois formules ci-dessous, choisir la formule qui, saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers le bas, permettra d'obtenir les valeurs de la suite (v_n) dans la colonne B.

Formule 1	LN(−1 + 2 * EXP(B2))
Formule 2	= LN(−1 + 2 * EXP(B2))
Formule 3	= LN(−1 + 2 * EXP(A2))

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n).

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, valider votre conjecture concernant le sens de variation de la suite (v_n).

3. **a.** Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(1+3\times 2^n\right)$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. Justifier que l'algorithme suivant écrit en langage Python renvoie un résultat quel que soit le choix de la valeur du nombre S.

```
from math import*
def seuil(S):
    V=ln(4)
    n=0
    while V < S :
      n=n+1
      V=ln(2*exp(V)-1)
    return(n)
```