

∞ Baccalauréat spécialité ∞

Thème : Probabilités, Variables aléatoires et Dénombrement

Sujets depuis 2021

Table des matières

1 Amérique du Nord - 28 mai 2019	4
2 Polynésie - 2 juin 2021	5
3 Asie J1 - 7 juin 2021	6
4 Asie J2 - 8 juin 2021	7
5 Centres étrangers J1 - 9 juin 2021	8
6 Centres étrangers candidats libres - 10 juin 2021	10
7 Métropole sujet 1 - 7 juin 2021	11
8 Métropole J2 - 8 juin 2021	12
9 Métropole J1 - 13 septembre 2021	14
10 Métropole J2 - 13 septembre 2021	16
11 Polynésie J1 - 4 mai 2022	17
12 Polynésie J2 - 5 mai 2022	18
13 Métropole J1 - 11 mai 2022	19
14 Centres étrangers J1 - 11 mai 2022	21
15 Métropole J2 - 12 mai 2022	23
16 Centres étrangers J2 - 12 mai 2022	25
17 Asie J1 - 17 mai 2022	26
18 Asie J2 - 18 mai 2022	27
19 Centres étrangers groupe 1 J1 - 18 mai 2022	29
20 Amérique du Nord J1 - 18 mai 2022	30
21 Centres étrangers J2 - 19 mai 2022	31
22 Amérique du Nord J2 - 19 mai 2022	32
23 Polynésie J1 - 30 août 2022	34

24 Métropole Antilles-Guyane J1 - 8 septembre 2022	35
25 Métropole, Antilles-Guyane J2 - 9 septembre 2022	37
26 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022	39
27 Amérique du Sud J2 - 27 septembre 2022	40
28 Nouvelle-Calédonie J2 - 27 octobre 2022	42
29 Centres étrangers J1 - 13 mars 2023	43
30 Polynésie J1 - 13 mars 2023	45
31 Centres étrangers J2 - 14 mars 2023	46
32 Polynésie J2 - 14 mars 2023	47
33 Centres étrangers J1 - 21 mars 2023	48
34 Asie J1 - 23 mars 2023	49
35 Amérique du Nord J1 - 27 mars 2023	52
36 La Réunion J1 - 28 mars 2023	54
37 La Réunion J2 - 29 mars 2023	55
38 Nouvelle-Calédonie J1 - 28 août 2023	56
39 Polynésie - 7 sept 2023	57
40 Métropole J1 - 11 sept 2023	58
41 Métropole J2 - 12 sept 2023	59
42 Amérique du Sud J1 - 26 sept 2023	61
43 Amérique du Sud J2 - 27 sept 2023	63
44 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2024	65
45 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2024	66
46 Centres étrangers – Sujet 1 – 5 juin 2024	68
47 Centres étrangers – Sujet 2 – 6 juin 2024	70
48 Centres étrangers (Suède) – 7 juin 2024	71
49 Asie – Sujet 1 – 10 juin 2024	72
50 Asie – Sujet 2 – 11 juin 2024	74
51 Métropole – Sujet 1 – 19 juin 2024	76
52 Métropole – Sujet 1 (secours) – 19 juin 2024	78
53 Métropole – Sujet 2 – 20 juin 2024	79

54 Métropole – Sujet 2 (dévoilé) – 20 juin 2024	81
55 Polynésie – Sujet 1 – 19 juin 2024	83
56 Polynésie – Sujet 2 – 20 juin 2024	85
57 Polynésie – 5 septembre 2024	86
58 Métropole Antilles-Guyane – 11 septembre 2024	87
59 Métropole Antilles-Guyane 12 septembre 2024	89
60 Amérique du Sud - Sujet 1 - 21 novembre 2024	91
61 Amérique du Sud - Sujet 2 - 22 novembre 2024	93
62 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2025	95
63 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2025	97
64 Amérique du Nord – Sujet secours – 22 mai 2025	99
65 Asie – Sujet 1 – 11 juin 2025	100
66 Asie – Sujet 2 – 12 juin 2025	102
67 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025	104
68 Centres étrangers – Sujet 2 – 13 juin 2025	106
69 Métropole – Sujet 1 – 17 juin 2025	107
70 Polynésie – Sujet 1 – 17 juin 2025	109
71 Métropole – Sujet 2 – 18 juin 2025	111
72 Polynésie – Sujet 2 – 18 juin 2025	113
73 Polynésie – 2 septembre 2025	115
74 Asie – 5 septembre 2025	117
75 Asie – 5 septembre 2025	118
76 Métropole – Sujet 2 – 10 septembre 2025	120
77 Amérique du Sud – Sujet 1 – 13 novembre 2025	122
78 Amérique du Sud – Sujet 2 – 14 novembre 2025	124
79 Nouvelle-Calédonie – Sujet 1 – 20 novembre 2025	126
80 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025	127

1 Amérique du Nord - 28 mai 2019

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3} .

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3.
 - a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé?
 - b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1. Dans cette question 1. on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
 - a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
 - b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75? Justifier.

2 Polynésie - 2 juin 2021

EXERCICE 2

5 points**Commun à tous les candidats**

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.

Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.

Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.

Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2.
 - a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif?
 - b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée?
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
 - a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

3 Asie J1 - 7 juin 2021

EXERCICE 3 commun à tous les candidats**5 points**

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.

On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
 - a. Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - b. Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul. Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
 - a. Déterminer la loi de probabilité de G .
 - b. Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur?
3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
- c. Calculer $P(X \geq 5)$ en arrondissant à 10^{-3} . Donner une interprétation du résultat obtenu.
- d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$.

4 Asie J2 - 8 juin 2021

EXERCICE 3

5 points**Commun à tous les candidats**

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs! ».

Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois curs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♥	
♥		
		♥

Le ticket est gagnant si les trois curs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois curs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\frac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
 - a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
 - b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'évènement $(X = 5)$.
 - c. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'évènement $(X \geq 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5 Centres étrangers J1 - 9 juin 2021

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.

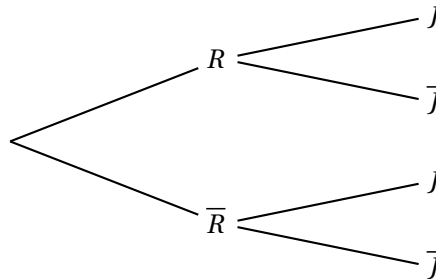
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $0,056$ à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.

La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie? Justifier votre réponse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

6 Centres étrangers candidats libres - 10 juin 2021

EXERCICE A - Fonction ln

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05.

On possède un test de dépistage de cette maladie.

On considère un échantillon de n personnes ($n \geq 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange.

Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n + 1)$.

2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n + 1$
$P(X_n = x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience?

Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0,95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x \ln(0,95)$.

Montrer que f est décroissante sur $[20 ; +\infty[$.

2. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20 ; +\infty[$.

Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.

4. En déduire le signe de f sur $[20 ; +\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages.

La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.

La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.

En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

7 Métropole sujet 1 - 7 juin 2021

EXERCICE 2

5 points**Commun à tous les candidats**

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles :

« positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $p(E)$ la probabilité d'un événement E .

On considère les événements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;
- \bar{D} et \bar{T} désignent respectivement les événements contraires de D et T .

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle défectueuse est égale à 0,98 ;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2.
 - a. Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
 - b. Démontrer que : $p(T) = 0,0775$.
3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.
Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

On rappelle que : $p(D) = 0,05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
On donnera un résultat arrondi au centième.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

8 Métropole J2 - 8 juin 2021

EXERCICE 2

6 points**Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

La leucose féline est une maladie touchant les chats; elle est provoquée par un virus.

Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.

On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.

Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie »;
- T : « Le test du chat est positif »;
- \bar{M} et \bar{T} désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

- a. Traduire la situation par un arbre pondéré.
 - b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
 - c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
 - d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.
2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
 - a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X .
 - b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
 - c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
 - d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.
 - a. Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.
 - b.

Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    P = 0  
    while P < 0,99 :  
        n = n + 1  
        P = 1 - 0,55 ** n  
    return n
```

- c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

9 Métropole J1 - 13 septembre 2021

Exercice 3, commun à tous les candidats

6 points

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.

Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = (0,04t^2 - 8t + 400)e^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0; 120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t .

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer, en faisant apparaître les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; 120]$ on a :

$$f'(t) = t(t - 100)e^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Selon cette modélisation :
 - a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
 - b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.
 - c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la « Chytridiomycose », provoquée par un champignon.

Le chercheur considère que :

- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de 0,74.

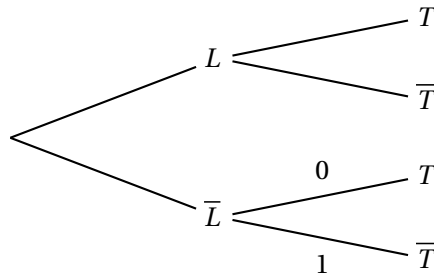
Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.
Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.

Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.

On notera T l'évènement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'évènement « Le lac est infecté par le champignon ».

On notera \bar{L} l'évènement contraire de L et \bar{T} l'évènement contraire de T .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de 0,185.
3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté?

10 Métropole J2 - 13 septembre 2021

EXERCICE 1

4 points**Commun à tous les candidats**

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques). Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.

On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.

Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- \bar{S} et \bar{I} les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
2.
 - a. Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.
 - b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.
 - c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam? On donnera un résultat arrondi au centième.
3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z , et quels sont ses paramètres?
- b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam? On donnera un résultat arrondi au centième.

11 Polynésie J1 - 4 mai 2022

EXERCICE 2 7 points

Thèmes : probabilités

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les événements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.
 - a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - b. Déterminer la probabilité pour qu'exactly deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99%.

12 Polynésie J2 - 5 mai 2022

EXERCICE 2 7 points

Thèmes : probabilités

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les événements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- \bar{C} et \bar{D} désignent respectivement les événements contraires de C et D .

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.
 - b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
 - c. Calculer $P(X \leq 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

13 Métropole J1 - 11 mai 2022

EXERCICE 3 (7 points)

Thème : probabilités

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

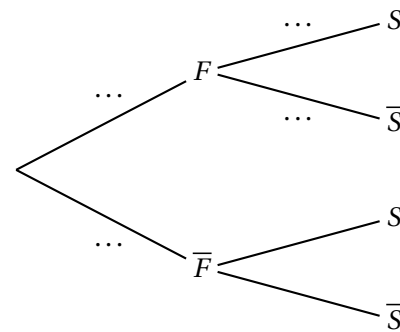
1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

\bar{F} et \bar{S} désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S .

- a. Donner la probabilité de l'évènement S .
- b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.
- c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208.
- d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
- e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage. Justifier l'affirmation du directeur.



2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.
 - a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X .
 - b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.
 - c. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i, n, p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

```
def proba(k) :
    P=0
    for i in range(0,k+1) :
        P=P+binomiale(i,20,0.25)
    return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

- d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.
3. Cette question est indépendante des questions 1 et 2.

Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5 %, contre 2 % d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.

Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

14 Centres étrangers J1 - 11 mai 2022

EXERCICE 4 7 points

Thème : Probabilités

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.

On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».

On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».

On note respectivement \bar{A} et \bar{B} les évènements contraires de A et B .

Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.
- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.
- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	\bar{A}	Total
B			
\bar{B}			
Total			1

2.
 - a. Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.
 - b. Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.
 - c. Les évènements A et B sont-ils indépendants? Justifier la réponse.
3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.
Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

15 Métropole J2 - 12 mai 2022

EXERCICE 1 (7 points)

Thème : probabilités

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.

Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Partie A

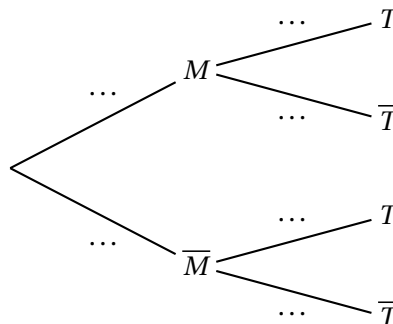
Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.

On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note \bar{M} et \bar{T} respectivement les évènements contraires de M et T .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5.
 - a. Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
 - b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
 - b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
 - c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie? Justifier la réponse.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99?

16 Centres étrangers J2 - 12 mai 2022**EXERCICE 4 7 points****Thème : Probabilités**

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.

On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.
 - a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
 - b. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.
2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connaît pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
 - a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
 - b. Résoudre l'inéquation pour x réel :

$$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

- c. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
 - d. Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?
3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).
Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros ?

17 Asie J1 - 17 mai 2022

EXERCICE 1

7 points

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

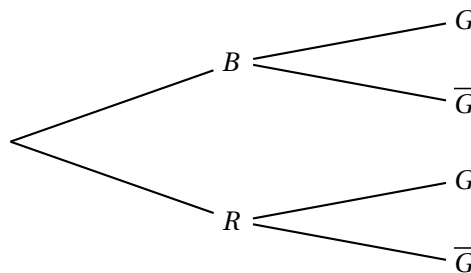
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
 - a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
 - b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.

Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2.
 - a. Montrer que $P(G) = 0,4$.
 - b. Un joueur gagne la partie.
Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue?
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants? Justifier.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
 - a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
 - b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
 - c. Calculer $P(X \geq 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».
 - a. Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.
 - b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

18 Asie J2 - 18 mai 2022**EXERCICE 3****7 points**

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.

S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.

Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.

S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0,6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leq 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet;

C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

- Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.
- Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.
- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.
- Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

19 Centres étrangers groupe 1 J1 - 18 mai 2022

EXERCICE 1 6 points

Principaux domaines abordés : Probabilités

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de 25 ans ;
- un forfait SENIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge l'*option coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.

On admet que :

- 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- 80 % des skieurs ont un forfait SENIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SENIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les événements :

- J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SENIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3} .
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15 % des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112. On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

20 Amérique du Nord J1 - 18 mai 2022

EXERCICE 1 (7 points)

Thème : probabilités

Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

On note :

- V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
- R l'évènement « Paul rate son train ».

a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.

c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.

On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .

c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .

d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

21 Centres étrangers J2 - 19 mai 2022

EXERCICE 1 6 points

Thème : Probabilités

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3.
 - a. Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191.
 - b. Les évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Calculer la probabilité de F sachant C , notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.
On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à 0,191.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.
 - c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X .
6. Soit n un entier naturel.

On considère dans cette question un échantillon de n salariés.

Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,99 ?

22 Amérique du Nord J2 - 19 mai 2022

EXERCICE 1 (7 points)

Thème : probabilités, suites

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

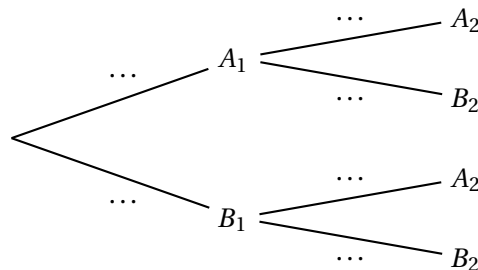
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n , on définit les évènements suivants :

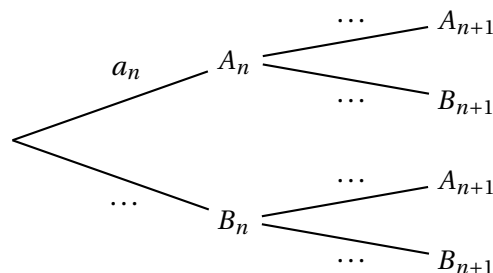
- A_n : « le vélo se trouve au point A le n -ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n -ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n , on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n . Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2.
 - a. Calculer a_2 .
 - b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3.
 - a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $n + 1$ -ième matins.



- b.** Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
- 4.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
 - 5.** Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
 - 6.** Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

23 Polynésie J1 - 30 août 2022

EXERCICE 1 7 points

probabilités

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non. Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques »;
- T : « le test est positif »;
- \bar{A} et \bar{T} sont respectivement les évènements contraires de A et T .

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4.
 - a. Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\bar{A} \cap T$, $A \cap \bar{T}$, $\bar{A} \cap \bar{T}$.
 - b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ». Démontrer que $p(E) = 0,0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.

On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
 - a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0625$.
 - b. Calculer $P(X = 7)$.
 - c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geq 10)$ soit supérieure à 0,95?

24 Métropole Antilles-Guyane J1 - 8 septembre 2022

Exercice 2 7 points

Thème probabilités

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

Une étude a montré que 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte.

Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'hôtel ne font aucune visite.

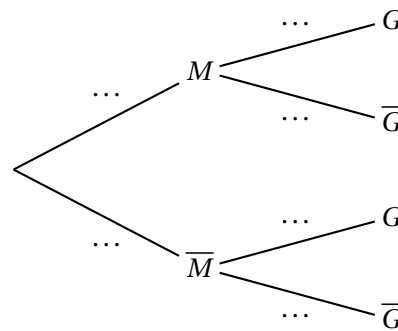
On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée » ;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note \bar{M} l'évènement contraire de M , \bar{G} l'évènement contraire de G , et pour tout évènement E , on note $p(E)$ la probabilité de E .

Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p(\bar{M} \cap \bar{G}) = 0,06$.

1. a. Vérifier que $p_{\bar{M}}(\bar{G}) = 0,2$, où $p_{\bar{M}}(\bar{G})$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.
- b. L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.
- c. Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?
- d. Montrer que $p(G) = 0,66$.



2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?
3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :
 - visite du musée : 12 euros ;
 - visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

- a. Donner la loi de probabilité de T . On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.
- b. Calculer l'espérance mathématique de T .
- c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour. Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.
4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros. Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.
Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel?
On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

25 Métropole, Antilles-Guyane J2 - 9 septembre 2022

Exercice 1 7 points

Thèmes : probabilités

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.

Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.

On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

- Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4;
- Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7;
- La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

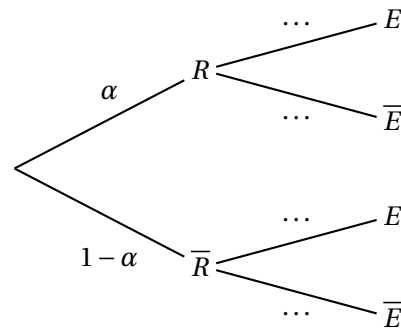
On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route »;
- E : « le client loue un vélo électrique »;
- \bar{R} et \bar{E} , évènements contraires de R et E .

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :

Si F désigne un évènement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F .



1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.
2.
 - a. Montrer que $p(E) = 0,7 - 0,3\alpha$.
 - b. En déduire que : $\alpha = 0,4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique?
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.
 - a. Donner la loi de probabilité de X . On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.
6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
On rappelle que la probabilité de l'évènement E est : $p(E) = 0,58$.

- a.** Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b.** Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.
- c.** Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

26 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022**EXERCICE 1 PROBABILITÉS****7 points****PARTIE A**

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97.

La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,01465.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

On note \overline{M} l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2.
 - a. Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
 - b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est 0,005.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,00525$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

27 Amérique du Sud J2 - 27 septembre 2022**EXERCICE 1 PROBABILITÉS****7 points**

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n° 1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n° 2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n° 3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n° 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n° 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n° 3.

On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 1 » ;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux » et \bar{D} son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} si nécessaire.

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0,0145$.
4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3.

PARTIE B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.

Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0145$.

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
 - a. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
 - b. Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.
2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,85.
Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison? Justifier la réponse.

PARTIE C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 3.

Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

28 Nouvelle-Calédonie J2 - 27 octobre 2022**EXERCICE 1****7 points****Principaux domaines abordés :** Probabilités

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

- les tirs à deux points.
Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.
- les tirs à trois points.
Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.

On considère les événements suivants :

 D : « Il s'agit d'un tir à deux points ». R : « le tir est réussi ».

- a.** Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
- b.** Calculer la probabilité $p(\overline{D} \cap R)$.
- c.** Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.
- d.** Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

- a.** Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- b.** Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- c.** Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.
- d.** Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99.

29 Centres étrangers J1 - 13 mars 2023

EXERCICE 2

6 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

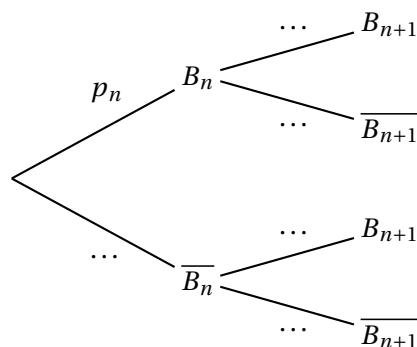
On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.

Soit n un entier naturel.

On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n .

Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.
 - b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc?
5.
 - a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
 - b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .
 - c. En déduire la limite de la suite (p_n) .

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres;

— la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.

Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

30 Polynésie J1 - 13 mars 2023**EXERCICE 1 4 points****Thème : probabilités***Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment*

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.

Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- \bar{J} et \bar{T} sont les évènements contraires de J et T .

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T .
3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.

Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.**Partie B**

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.

On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.

On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

 X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.*Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.*

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

31 Centres étrangers J2 - 14 mars 2023**EXERCICE 4****3 points**

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé. Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification.

Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est $0,6$.

- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés.

Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.

Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n° 1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80 % des cas.

Condition n° 2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.

Le jeu peut-il être retenu ?

32 Polynésie J2 - 14 mars 2023

EXERCICE 1 5 points

Thème : probabilités, suites

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

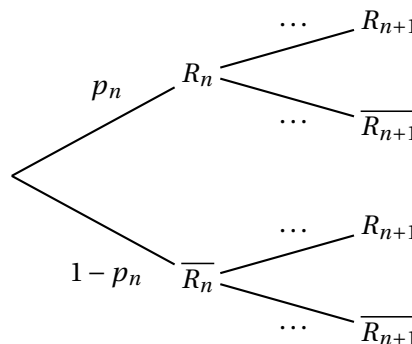
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90% des cas le jour suivant;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70% des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n -ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n . On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n , on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = p_n - 0,75$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

- c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .
- d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geq 9)$, à 10^{-3} près.

33 Centres étrangers J1 - 21 mars 2023

EXERCICE 2

5 points

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

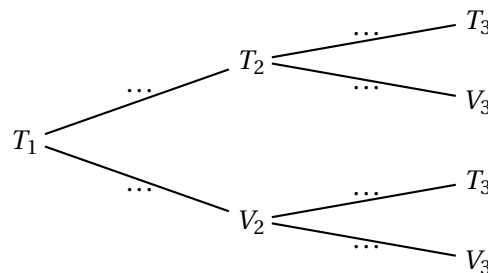
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

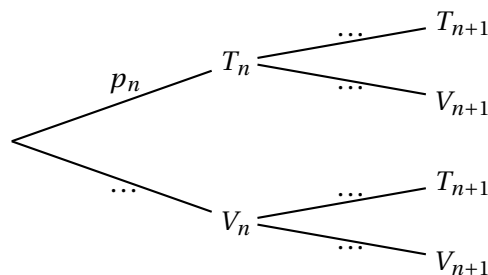
- T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n -ième jour »
- V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n -ième jour »
- On note p_n la probabilité de l'évènement T_n ,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2^e et 3^e jours,



2. Calculer p_3
3. Le 3^e jour, M. Durand utilise son vélo.
Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.
4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n -ième et $(n + 1)$ -ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

34 Asie J1 - 23 mars 2023**EXERCICE 4****5 points**

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15.

La bille numérotée 1 est rouge.

Les billes numérotées 2 à 5 sont bleues.

Les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.

On note R (respectivement B et V) l'évènement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

Question 1 :

Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

Réponse A $\frac{7}{15}$	Réponse B $\frac{9}{15}$	Réponse C $\frac{11}{10}$	Réponse D Aucune des affirmations précédentes n'est juste.
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------	---

Question 2 :

Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

Réponse A $\frac{1}{15}$	Réponse B $\frac{7}{15}$	Réponse C $\frac{1}{10}$	Réponse D Aucune des affirmations précédentes n'est juste.
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	---

Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.

Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ.

Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est -1 euro.

Question 3 :

Que vaut $P(G = 5)$?

Réponse A $\frac{1}{15}$	Réponse B $\frac{2}{15}$	Réponse C $\frac{1}{3}$	Réponse D Aucune des affirmations précédentes n'est juste.
-----------------------------	-----------------------------	----------------------------	---

Question 4 :

Quelle est la valeur de $P_R(G = 0)$?

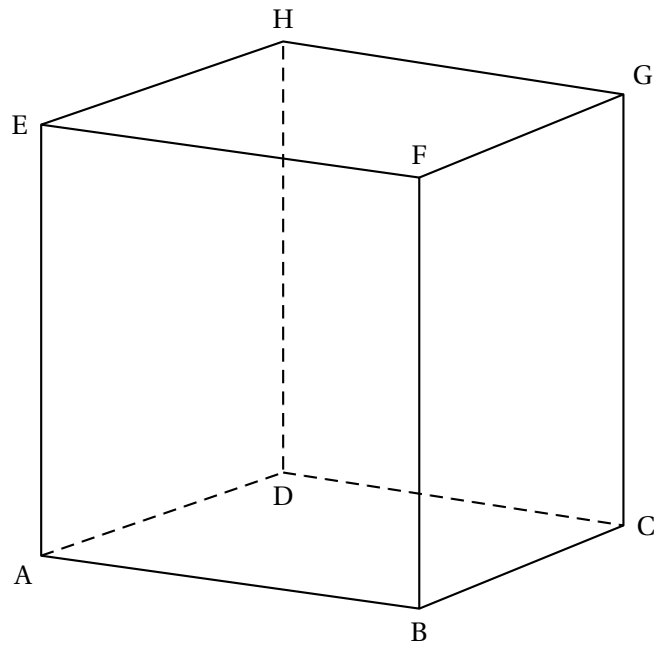
Réponse A 0	Réponse B $\frac{1}{15}$	Réponse C 1	Réponse D Aucune des affirmations précédentes n'est juste.
----------------	-----------------------------	----------------	---

Question 5 :

Que vaut $P_{(G=-4)}(V)$?

Réponse A $\frac{1}{15}$	Réponse B $\frac{4}{15}$	Réponse C $\frac{1}{2}$	Réponse D Aucune des affirmations précédentes n'est juste.
-----------------------------	-----------------------------	----------------------------	---

ANNEXE à rendre avec la copie



35 Amérique du Nord J1 - 27 mars 2023

EXERCICE 1

5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69% des déchets sont minéraux et non dangereux;
- 28% des déchets sont non minéraux et non dangereux;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73% des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 49% des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 35% des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

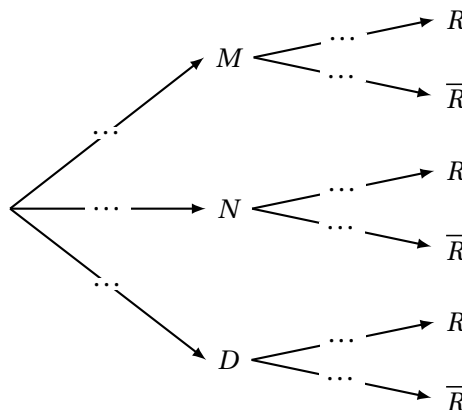
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les événements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux »;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux »;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux »;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note \bar{R} l'évènement contraire de l'évènement R .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3. Déterminer la probabilité $P(M \cap \bar{R})$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0,6514$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.
 - a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
 - b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*
2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.
 - a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
 - b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

36 La Réunion J1 - 28 mars 2023

EXERCICE 1

5 points

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

- L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
 - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
 - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
 - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,3;
 - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les événements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel »;

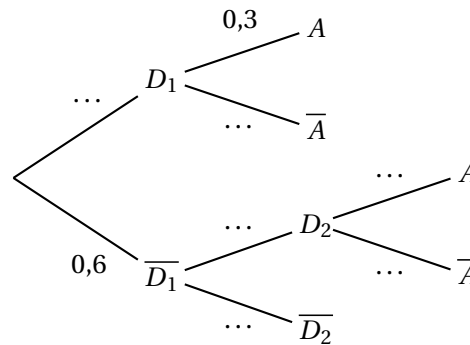
D_2 : « la personne décroche au deuxième appel »;

A : « la personne achète le produit ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = 0,204$.
3. On sait que la personne a acheté le produit.
Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,204.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.
 - a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.
 - c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X .

Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On considère désormais un échantillon de n personnes.
Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

37 La Réunion J2 - 29 mars 2023

EXERCICE 1

5 points

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.

On suppose que chaque client achète un seul matelas.

On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

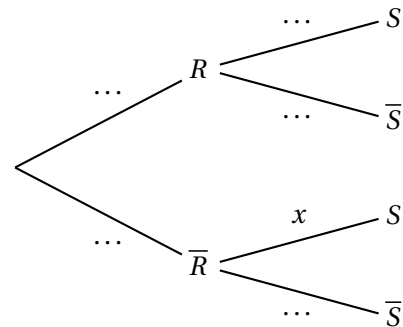
Partie A

On choisit au hasard un client et on note les événements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\bar{R}}(S)$, où $P_{\bar{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Démontrer que $x = 0,8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS?
On arrondira le résultat à 10^{-2} .



Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
 - a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
On arrondira le résultat à 10^{-3} .
2. Soit n un entier naturel non nul.
On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
 - a. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
Démontrer que $p_n = 0,82^n$.
 - b. Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$.
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

38 Nouvelle-Calédonie J1 - 28 août 2023**EXERCICE 1 5 points**

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.

On sait que :

- 60 % des clients choisissent un bateau à voile; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les événements :

- V : « le client choisit un bateau à voile »;
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à 0,30.
4. En déduire $P_{\bar{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile? Arrondir à 0,01 près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à 0,12. Cette probabilité n'est que de 0,005 si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note A l'évènement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P(\bar{L} \cap A)$.
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux.
À combien d'avaries peut-elle s'attendre?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

39 Polynésie - 7 sept 2023**EXERCICE 1 4 points****Thème : probabilités**

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique.

Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plate-forme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

- 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,5 ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,375.

On considère les événements suivants :

- C : « un client a consulté la plate-forme numérique » ;
- E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique » ;
- T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

- a. Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique et ait consulté la plate-forme numérique.
On pourra utiliser un arbre pondéré.
 - b. Démontrer que $P(C) = 0,4$.
 - c. On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique.
Calculer la probabilité que le client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique.
2. La concession accueille quotidiennement 17 clients en moyenne.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.
 - a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - b. Calculer la probabilité qu'au moins trois des clients souhaitent acheter un véhicule à moteur électrique lors d'une journée.
Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.

40 Métropole J1 - 11 sept 2023

EXERCICE 3

4 points

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

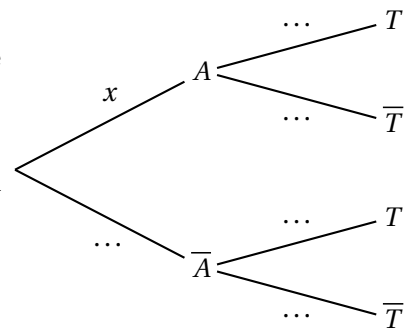
On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique » ;
- T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On notera \bar{A} et \bar{T} les évènements contraires de A et T . On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $x = p(A)$.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2.
 - a. Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.
 - b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».



Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

41 Métropole J2 - 12 sept 2023

EXERCICE 1

5 points

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.

On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée. Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie.

Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ».

On choisit une vache au hasard dans la région.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0,992 ;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984 .

On désigne par :

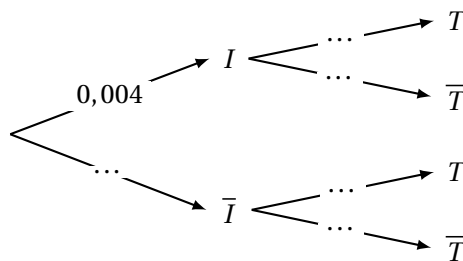
- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection » ;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note \bar{I} l'évènement contraire de I et \bar{T} l'évènement contraire de T .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2.
 - a. Calculer la probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif. On donnera le résultat à 10^{-3} près.
 - b. Montrer que la probabilité, à 10^{-3} près, que la vache présente un test positif est environ égale à 0,020.
 - c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. On donnera le résultat à 10^{-3} près.
 - d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test.
Calculer la probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
 - b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.
 - c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.
4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

42 Amérique du Sud J1 - 26 sept 2023**Exercice 2****5 points**

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

- a. Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.
- b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.

On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.

La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,016.

Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.

On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

- a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.
- b. Par la méthode de votre choix que vous explicitez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $p(X \geq 1) \geq 0,99$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

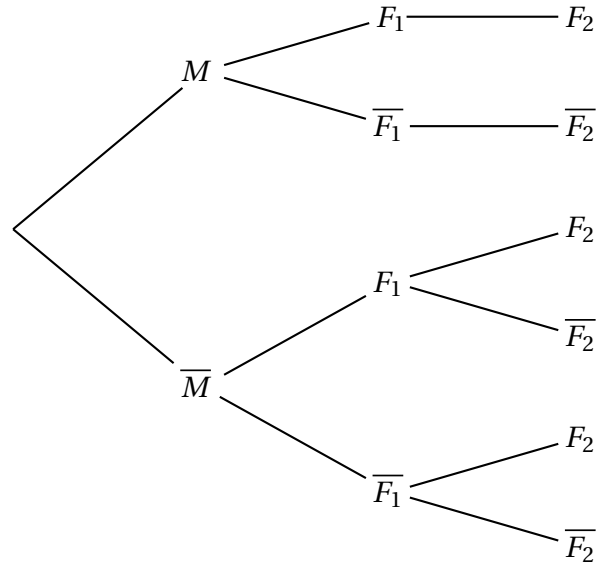
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.

Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les événements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes »;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille »;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et \bar{A} l'évènement contraire de A .



- Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
- Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,315 07.
- Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

43 Amérique du Sud J2 - 27 sept 2023**Exercice 1****5 points****Partie A**

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.

On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.

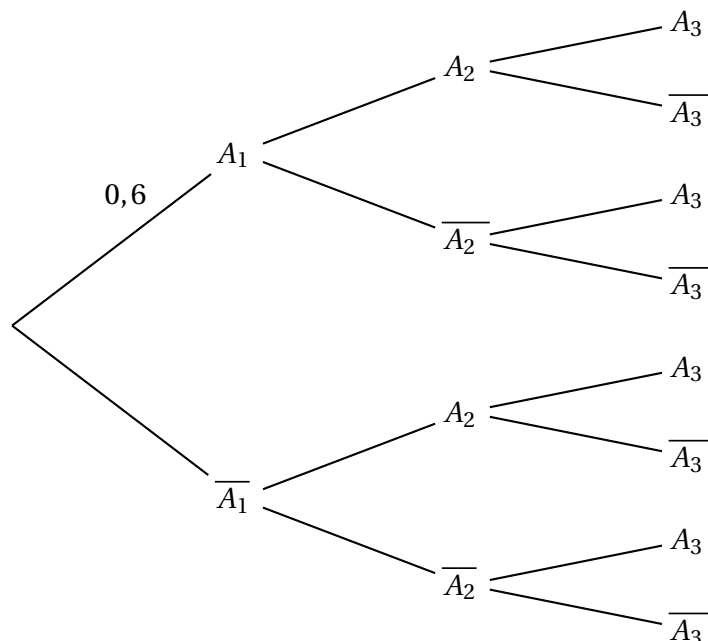
Pour tout évènement A , on note $p(A)$ sa probabilité et \bar{A} l'évènement contraire de A .

On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.

On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1^{er} tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2^e tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3^e tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,401 5.
3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X , notée $E(X)$.

- a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,1			0,0735

- b. Calculer $E(X)$.
c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère N , un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.

Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible.

On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.
 - a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
 - b. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'exactly 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.
2. Par la méthode de votre choix, que vous explicitez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.

44 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2024**EXERCICE 1****5 points**

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 %;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 %;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare »;
- E l'évènement « le joueur tire une épée »;
- \bar{R} et \bar{E} les évènements contraires des évènements R et E .

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millièm.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millièm.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en uvre.

45 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2024**Exercice 1****5 points**

Les données publiées le 1^{er} mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.

On note :

- N l'évènement « le véhicule est neuf »;
- R l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable »;
- \bar{N} et \bar{R} les évènements contraires des évènements contraires de N et R .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.

Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0,9999$.

46 Centres étrangers – Sujet 1 – 5 juin 2024

EXERCICE 1

5 points

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03}.$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$f'(x) = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles anti-dopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites. Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

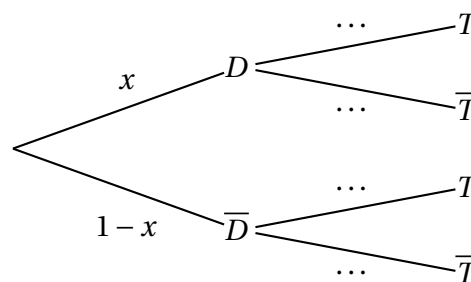
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'évènement : « le sportif est dopé ».
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x , la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0,93x + 0,03$.
4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés.

La fonction f désigne la fonction définie à la partie A.

Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0,05)$. *En donner une valeur arrondie au centième.*

5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.
- a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. Arrondir le résultat au centième.
 - b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test?
Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.

47 Centres étrangers – Sujet 2 – 6 juin 2024**EXERCICE 1****5 points**

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.

Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4 ; 5 ; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2.
 - a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
 - b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1 , X_2 , et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S .
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
 - a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
 - b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

48 Centres étrangers (Suède) – 7 juin 2024**Exercice 2****5 points**

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n -ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
 - b. Calculer l'espérance mathématique $E(Z)$ de la variable aléatoire Z . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général.

Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n .

1.
 - a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0,5$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
 - b. Déterminer l'expression de x_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite (x_n) .
 - c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

49 Asie – Sujet 1 – 10 juin 2024**EXERCICE 3****5 POINTS**

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

Source : [https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667\(21\)00064-5/fulltext](https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext)

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
 - a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 - b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19. Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.

Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.

La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).

La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).

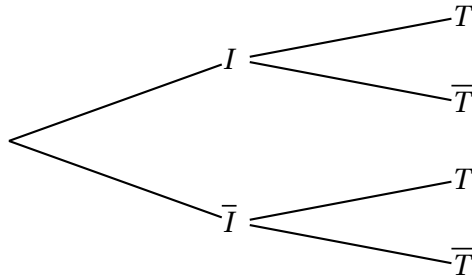
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.

On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0,05503$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif?

On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.

Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.

On choisit au hasard un individu de ce groupe; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté?

50 Asie – Sujet 2 – 11 juin 2024**EXERCICE 2****5,5 points**

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

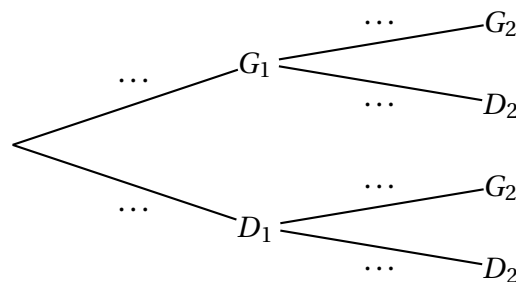
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

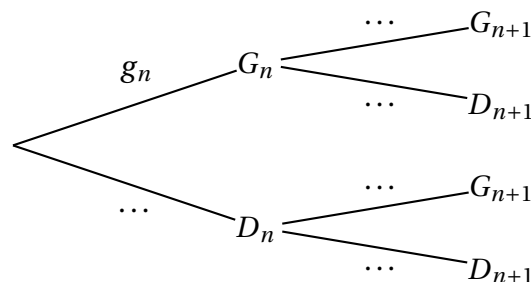
- G_n : « Léa gagne la n -ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n -ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n . On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .
4. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $(n + 1)$ -ième parties de la journée.



- b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) .

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1 def seuil(e) :  
2     g = 0.5  
3     n = 1  
4     while ... :  
5         g = 0.5 * g + 0.2  
6         n = ...  
7     return (n)
```

51 Métropole – Sujet 1 – 19 juin 2024

EXERCICE 2

5 points

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75% pour les clients sur internet;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager;
- 80% pour les clients en grande surface.

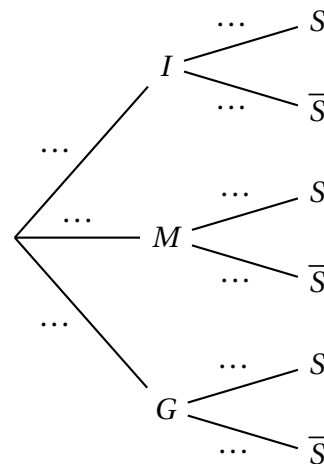
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet »;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager »;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface »;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera \bar{A} son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.
5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.



- 6.** En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
- 7.** Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 .

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
- L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

- a.** Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T .
- b.** Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

52 Métropole – Sujet 1 (secours) – 19 juin 2024**EXERCICE 2****4 points****Partie A**

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.

On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3 .
2.
 - a. Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

53 Métropole – Sujet 2 – 20 juin 2024**EXERCICE 1****5 points**

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

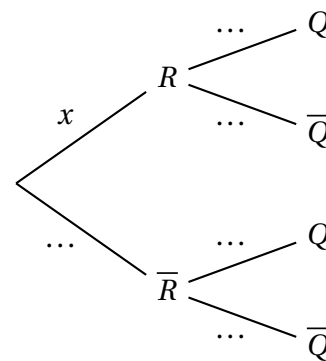
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et \bar{A} son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
 - a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
 - b. Montrer que $x = 0,9$.



3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.

À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.

Les variables aléatoires N_1, N_2, \dots, N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S .

6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

- a.** Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice?
- b.** Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
- c.** À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

54 Métropole – Sujet 2 (dévoilé) – 20 juin 2024

EXERCICE 1

5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.

Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.

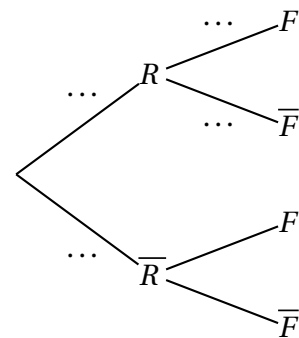
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note \bar{E} son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1.
 - a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
 - b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
 - c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
 - d. Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.



Cette affirmation est-elle exacte? Justifier.

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.

Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

- a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
- b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients.

On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.

On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

55 Polynésie – Sujet 1 – 19 juin 2024

Exercice 3

5 points

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

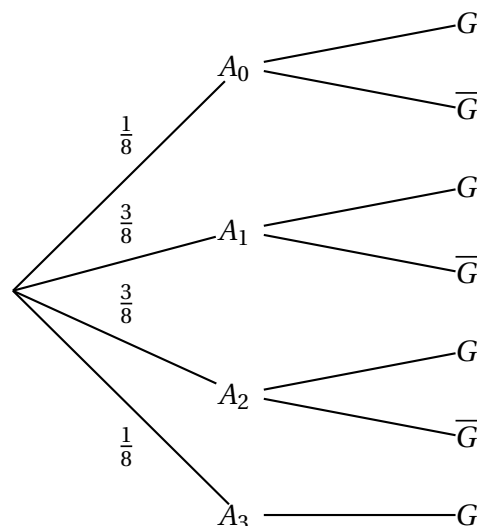
- On lance trois pièces équilibrées :
 - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
 - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».
- Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \frac{27}{64}$
4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative ?
5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

56 Polynésie – Sujet 2 – 20 juin 2024**Exercice 1****4 points**

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les Jeux olympiques et paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les événements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note \bar{J} et \bar{S} leurs événements contraires.

Dans les questions 1. et 2., les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\frac{8}{15}$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2.
 - a. Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.
 - b. En déduire la probabilité de S sachant \bar{J} notée $P_{\bar{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.

On assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

- a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
- b. Calculer la probabilité qu'exactly 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.
- c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.

Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.

Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

57 Polynésie – 5 septembre 2024**Exercice 1****5 points**

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(B) = 0,658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

- a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
- b. Calculer $P(X = 8)$.
- c. Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
- d. Calculer l'espérance de X .
- e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

58 Métropole Antilles-Guyane – 11 septembre 2024**Exercice 4****4 points**

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. *On arrondira les résultats à 10^{-3} près.*
 - a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
 - b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».
Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i , pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i -ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \dots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, \dots, M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ .

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S .
Montrer que : $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

- a.** Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1.$$

- b.** En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition. Bienaymé-Tchebychev

59 Métropole Antilles-Guyane 12 septembre 2024**Exercice 2****5 points**

La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

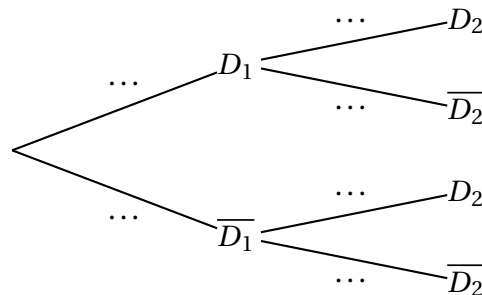
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n -ième déplacement »;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n .

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n) .

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

On pourra s'aider d'un arbre.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

- b. La suite (p_n) est-elle convergente? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n =$

$$p_n - \frac{2}{3}.$$

- a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
- b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

60 Amérique du Sud - Sujet 1 - 21 novembre 2024**Exercice 2****6 points**

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.

L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

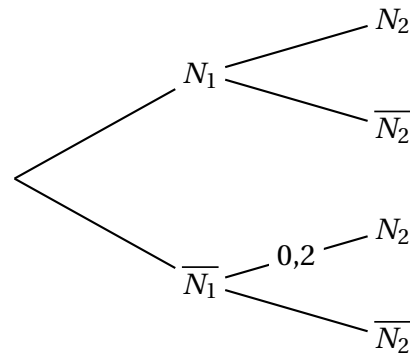
Pour tout évènement A , on note \bar{A} son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

- a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est 0,2.

- b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 .
3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2
Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 .
On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2} .

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X . Justifier votre réponse.

2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 - 0,72^n \geq 0,9.$$

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :

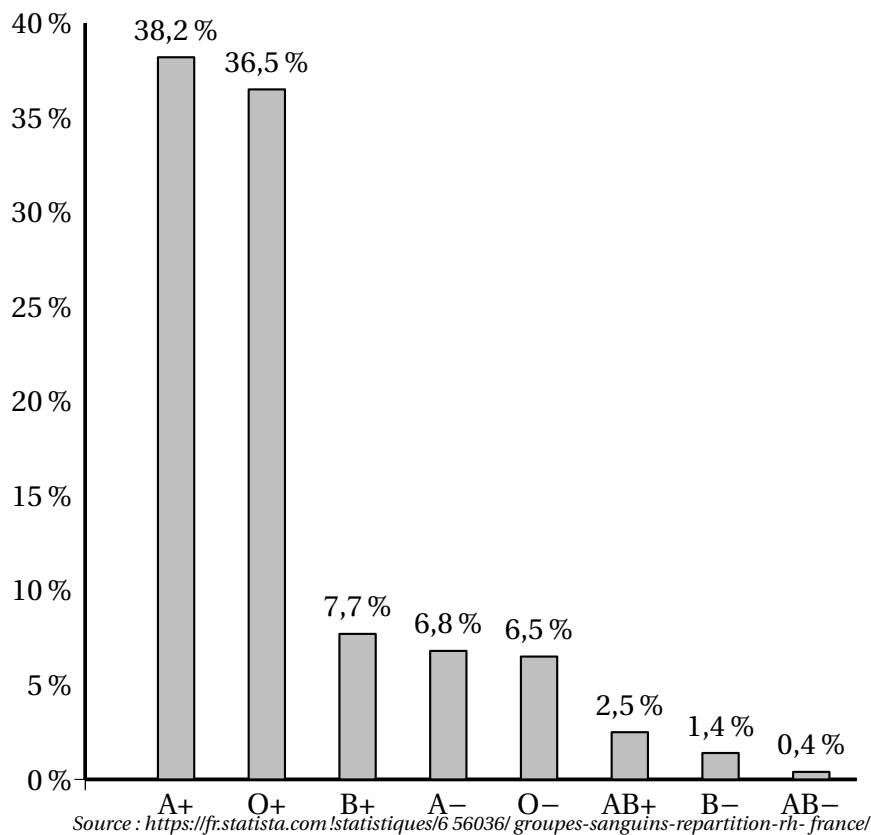
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

61 Amérique du Sud - Sujet 2 - 22 novembre 2024**Exercice 1****5 points**

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



A+, O+, B+, A-, O-, AB+, B- et AB- sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.

Par exemple : A + est le groupe sanguin A de rhésus +.

Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Dans l'exercice, on adopte les notations du type :

A + est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »

A- est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus - »

A est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note $Rh+$ l'évènement « La personne est de rhésus positif ».

- Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.
- Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0,450$ à 0,001 près.
- Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus.
Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population française est de groupe O–.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.
 - a. Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse.
 - b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument k écrite en langage Python.

```
def proba(k) :  
    p=0  
    for i in range(k+1) :  
        p = p + binomiale(i,50,0.065)  
    return p
```

Cette fonction utilise la fonction binomiale d'argument i , n et p , créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

62 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2025

EXERCICE 1

6 points

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

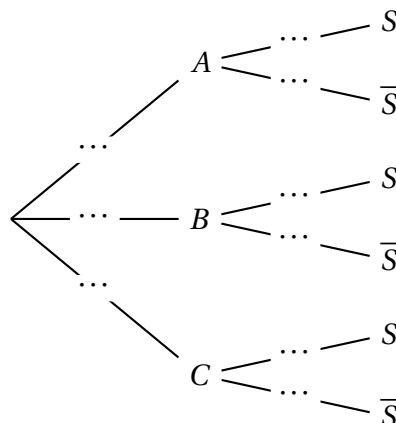
Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- S : « La connexion est stable ».

On note \bar{S} l'évènement contraire de l'évènement S .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.
3. Calculer la probabilité $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,855$.
5. On suppose désormais que la connexion est stable.
Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.
On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.
 - a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
 - b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millième.*
2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.
 - a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.
 - b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.
3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$, où X_n est la variable aléatoire définie à la question 2.
 - a. Calculer l'espérance $E(F_n)$.
On admet que $V(F_n) = \frac{0,123975}{n}$.
 - b. Vérifier que : $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$
 - c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

63 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2025**EXERCICE 1****5 points**

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millièème.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N .
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
 - a. Exprimer T en fonction de N .
 - b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T . Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matches, où n est un nombre entier strictement positif.

On note X_1, X_2, \dots, X_n les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^e, ..., n -ième matches. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X .

On pose
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .

- c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
- d. En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.
2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

64 Amérique du Nord – Sujet secours – 22 mai 2025**EXERCICE 3****5 points**

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2 % de la population d'un pays. Dans ce pays, 90 % de la population a été vaccinée contre ce virus.

On constate que 62 % des personnes contaminées avaient été vaccinées.

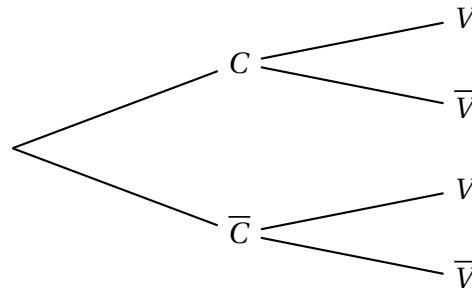
On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :

C : « la personne a été contaminée »

V : « la personne a été vaccinée ».

Les évènements contraires des évènements C et V sont notés respectivement \bar{C} et \bar{V} .

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.
2. **a.** Calculer $P(C \cap V)$.
b. En déduire $P(\bar{C} \cap V)$.
3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
 - a.** « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »
 - b.** « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »
6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.

La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.

On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0,02$.

- a.** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.
- b.** Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

65 Asie – Sujet 1 – 11 juin 2025**EXERCICE 2****5 points**

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95 % des jouets réussissent le test de fabrication ;
- Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité ;
- 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2.
 - a. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.
 - b. Montrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = 0,2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95.

Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n .
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
 - a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \frac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.

On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n .

a. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$.

b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

66 Asie – Sujet 2 – 12 juin 2025**EXERCICE 1****5 points**

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.

« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».

(<https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya>)

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.

Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de 0,999;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de 0,005.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.

Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».
- T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

Partie A : Étude d'un exemple

1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

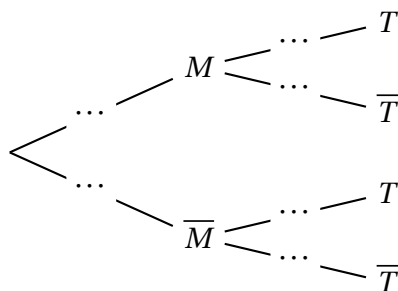
« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'île de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».

(<https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya>)

Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.

Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'île de La Réunion.

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
7. Peut-on estimer que ce test est fiable? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.

On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p .

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p .
3. Montrer que $P_T(M) = \frac{999p}{994p + 5}$.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable?

Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La Réunion est de 0,36.

On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.

On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.

Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'évènement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99. Expliquer la démarche.

67 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025**EXERCICE 1****6 points***Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes*

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.

Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.

Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.

On considère les événements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total »;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera \bar{T} et \bar{E} les événements contraires de T et E .

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P(\bar{T} \cap E)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.
Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1 , X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1 .

2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.

Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.

68 Centres étrangers – Sujet 2 – 13 juin 2025**EXERCICE 3****4 points**

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères. On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en partie B.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S .

69 Métropole – Sujet 1 – 17 juin 2025

EXERCICE 1

5 points

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O. Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A »;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B »;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB »;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O »;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un évènement quelconque E , on note \bar{E} l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E .

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.

2. Montrer que $p(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On précise que $p(R) = 0,8397$.

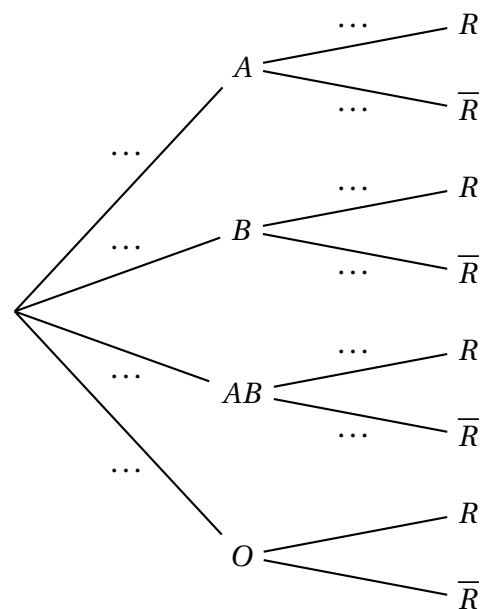
Montrer que $p_O(R) = 0,83$.

4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.

Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.

Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,071 4.

5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.



- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
- c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 7,14 et que sa variance $V(X)$ est égale à 6,63 à 10^{-2} près.

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1, 2, 3, ..., N où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ..., X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.

- a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice?
- b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.
- c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N .

Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.

- d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95.$$

70 Polynésie – Sujet 1 – 17 juin 2025**Exercice 1****5 points**

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatrics*, révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.

On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.

L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.

L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire.

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et \bar{E} son événement contraire.

Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.

Partie A

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :

- R L'évènement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
- A L'évènement : « l'enfant interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.
2.
 - a. Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire.
 - b. En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.
 - c. L'enfant interrogé habite en zone urbaine. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie B

On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.

On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie C

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires A_1, A_2, \dots, A_{20} . On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.

On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}.$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20} .
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

$$P(2 < M_{20} < 6) > 0,97.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

71 Métropole – Sujet 2 – 18 juin 2025**EXERCICE 1****5 points**

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans cet exercice on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multisports au cours du week-end.

Les résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A

Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation au roller composée de deux séances de cours.

On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule.

On désigne par A et B les événements suivants :

- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et \bar{E} son événement contraire.

Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0,6$.

De plus on constate que :

- Si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0,3$;
- Si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0,4$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que $P(B) = 0,34$.
4. La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours.
Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.
5. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.
On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de $0,24$.
 - a. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?
 - c. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisport. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minutes avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche.

On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à 0,77.

72 Polynésie – Sujet 2 – 18 juin 2025

EXERCICE 1

5 points

Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près. Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre. Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).

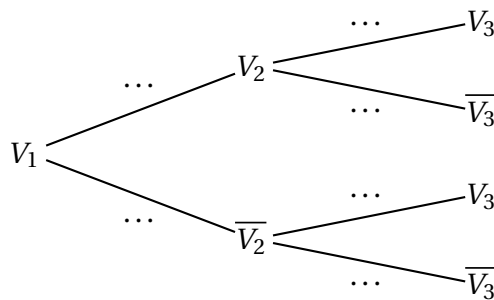
La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas. Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l'évènement : og la n -ième machine détient la valeur 1 fg;
- \overline{V}_n l'évènement : og la n -ième machine détient la valeur 0 fg.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



- b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.
- a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

- b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

- c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.

On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$.

```
1 def simulation(n):
2     donnee = 1
3     liste = [donnee]
4     for k in range(n):
5         if rand() < 0.1
6             donnee = 1 - donnee
7         liste.append(donnee)
9     return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer `[1, 0, 0, 1]`. Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.
2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie la liste `[1, 1, 1, 1, 1]` et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]`.

73 Polynésie – 2 septembre 2025**EXERCICE 1****5 points**

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de conduire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.

En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.

On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les événements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée »;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A

1. Dresser un arbre de probabilités modélisant cette situation.
2. **a.** Démontrer que $P(R) = 0,59664$.
Dans la suite, on gardera la valeur 0,597 arrondie à 10^{-3} près.
b. Donner ce résultat en pourcentage et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative. Quelle est la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée?
4. Quelle devrait être la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée si on voulait que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 %?

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.
2. Calculer $P(X \geq 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22,53$ et $V(Y) = 9,81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

- a. Exprimer Z en fonction de X et Y . En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
- b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

74 Asie – 5 septembre 2025**EXERCICE 3****4,75 points**

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions.

Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte.

Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4.

Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses? Arrondir le résultat à 10^{-4} près.
3. Donner l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.

On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

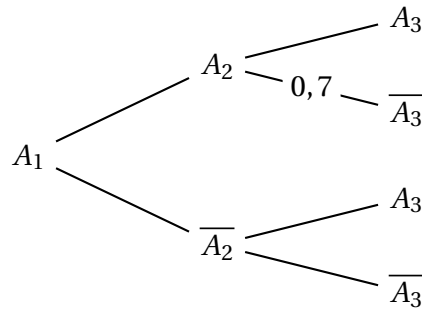
- a. Calculer $P(Y = 10)$, on donnera la valeur exacte du résultat.
- b. À partir de combien de bonnes réponses la note finale de Dominique est-elle positive? Justifier.
- c. Calculer $P(Y \leq 0)$, on donnera une valeur approchée au centième.
- d. Montrer que $Y = 1,5X - 5$.
- e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y .

75 Asie – 5 septembre 2025**EXERCICE 4****5,25 points**Soit n un entier naturel non nul.Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n .Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.**Partie A :**

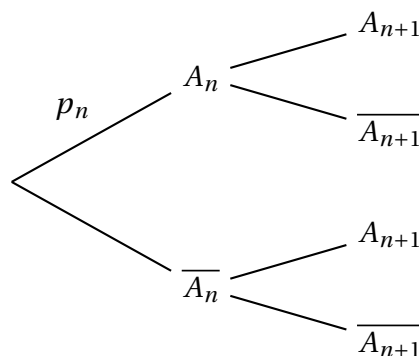
1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. Montrer que $p_3 = 0,58$.
3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7$.
On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par :
 $u_n = p_n - 0,5$.
- b. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- c. En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n .
- d. Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Partie C :

Soit $x \in]0 ; 1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x$.
2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite (p_n) est convergente et donner sa limite.

76 Métropole – Sujet 2 – 10 septembre 2025

EXERCICE 1

6 points

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

Partie A - Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à 0,4;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2.
 - a. Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.
 - b. Calculer $P(X \leq 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B - Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparaît plus pertinente :

- si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est 0,5
- par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit l'année suivante est 0,3.

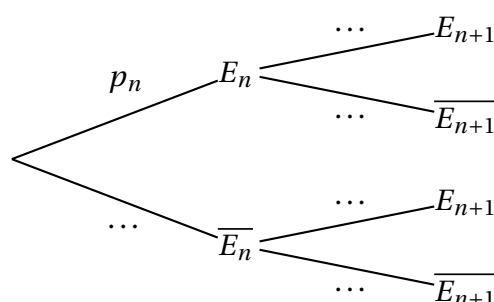
On considère que l'année de référence est 2023.

On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année 2023 + n »;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n .

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0,3$.
3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4.
 - a. Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n) .
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n \leq \frac{3}{8}$.
 - c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n) .
 - d. En déduire la convergence de la suite (p_n) .

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n) .

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et préciser son premier terme.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$p_n = \frac{3}{8}(1 - 0,2^n).$$

- c. Calculer la limite de la suite (p_n) .
- d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

77 Amérique du Sud – Sujet 1 – 13 novembre 2025

Exercice 1

4 points

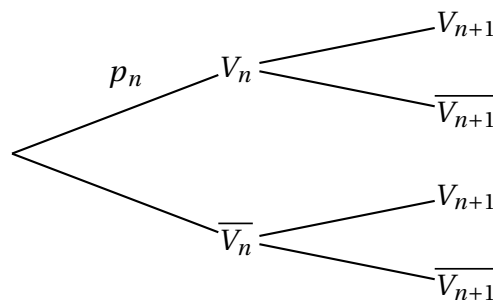
Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n , on note V_n , l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n^e jour » et p_n la probabilité de V_n .

Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

- Indiquer la valeur de p_2 .
 - Montrer que $p_3 = 0,88$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
 - Sachant que le 3^e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent? On arrondira le résultat à 10^{-2} .
- Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



- Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7$.
- On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geq 1$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

	Programme 1	Programme 2	Programme 3
1	<code>def repas(n):</code>	1 <code>def repas(n):</code>	1 <code>def repas(n):</code>
2	<code>p=1</code>	2 <code>p=1</code>	2 <code>p=1</code>
3	<code>L=[p]</code>	3 <code>L=[p]</code>	3 <code>L=[p]</code>
4	<code>for k in range(1,n):</code>	4 <code>for k in range(1,n+1):</code>	4 <code>for k in range(1,n):</code>
5	<code>p = 0.2*p+0.7</code>	5 <code>p = 0.2*p+0.7</code>	5 <code>p = 0.2*p+0.7</code>
6	<code>L.append(p)</code>	6 <code>L.append(p)</code>	6 <code>L.append(p+1)</code>
7	<code>return(L)</code>	7 <code>return(L)</code>	7 <code>return(L)</code>

- Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ? Aucune justification n'est attendue.
 - Avec le programme choisi à la question **a**, donner le résultat affiché pour $n = 5$.

5. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.
6. En déduire la limite de la suite (p_n) .

78 Amérique du Sud – Sujet 2 – 14 novembre 2025**Exercice 1****6 points**

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.

En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.

En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.

On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement S puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,695.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service?
5. Les évènements S et G sont-ils indépendants? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
 - a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres? Justifier.
 - b. Calculer $P(X \leq 18)$.
 - c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées?
 - d. Déterminer l'espérance de X .
2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.
On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

- a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n .

- b.** Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n , $P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$.
- c.** En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75; 0,95[$ avec une probabilité supérieure à 0,9.

79 Nouvelle-Calédonie – Sujet 1 – 20 novembre 2025

EXERCICE 1

5 points

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.

- Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
- Urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
- Urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac :

- si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
- si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :

- A : le joueur obtient une boule avec la lettre A.
- C : le joueur obtient un billet de 50 euros.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement « le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 € » ?

3. Démontrer que la probabilité $P(C)$ est égale à 0,3375.

4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.

L'affirmation « Il y a plus de 80% de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre B » est-elle vraie ? Justifier.

5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.

Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 €, on a $X_1 = 50$.

Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à 23,50 et que la variance $V(X_1)$ est égale à 357,75.

6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie. On note X_2 la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.

On note Y la variable aléatoire ainsi définie : $Y = X_1 + X_2$.

a. Montrer que $E(Y) = 47$.

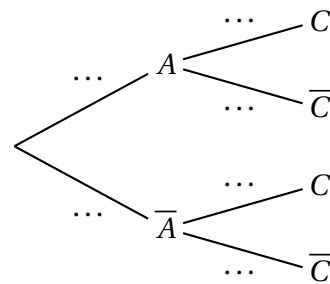
b. Expliquer pourquoi on a $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$.

7. Le joueur joue d'eux-mêmes une troisième, une quatrième, ..., une centième partie.

On définit donc de la même façon les variables aléatoires X_3, X_4, \dots, X_{100} .

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$.

Démontrer que la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $]1950 ; 2750[$ est supérieure ou égale à 0,75.

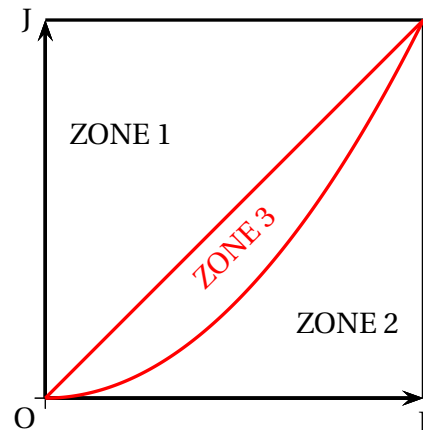


80 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025**EXERCICE 2****6 points**

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ ci-contre, on a représenté :

- la droite d'équation $y = x$;
- la droite d'équation $y = 1$;
- la droite d'équation $x = 1$;
- la parabole d'équation $y = x^2$.

On peut ainsi partager le carré $OIKJ$ en trois zones.



Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 »;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.
3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3?

Partie C : un second jeu

Un joueur, appelé joueur $n^{\circ} 1$, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.

Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.

On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur $n^{\circ} 1$. On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1 .

1.
 - a. Calculer $E(X_1)$.
 - b. Montrer que $V(X_1) = \frac{5}{9}$.
2. Un joueur $n^{\circ} 2$ et un joueur $n^{\circ} 3$ jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur $n^{\circ} 1$. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.
On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs $n^{\circ} 2$ et $n^{\circ} 3$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.
 - a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.
 - b. Calculer $E(Y)$.
 - c. Justifier que $V(Y) = \frac{5}{3}$.