

∞ Baccalauréat spécialité ∞

Thème : Étude de la fonction logarithme népérien

Sujets depuis 2021

Table des matières

1 Amérique du Nord 28 mai 2019	3
2 Polynésie - 2 juin 2021	4
3 Asie 1 - 7 juin 2021	5
4 Asie 2 - 8 juin 2021	6
5 Métropole Antilles–Guyane La Réunion sujet 2 - 8 juin 2021	8
6 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021	9
7 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021	12
8 Centres étrangers 2 - 12 mai 2022	13
9 Asie 1 - 17 mai 2022	14
10 Asie 2 - 18 mai 2022	17
11 Centres étrangers Groupe I J2 - 19 mai 2022	18
12 Polynésie - 30 août 2022	19
13 Métropole J2 - 9 septembre 2022	20
14 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022	21
15 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022	22
16 Amérique du Sud J2 - 27 septembre 2022	23
17 Nouvelle-Calédonie J1 - 26 octobre 2022	25
18 Nouvelle-Calédonie J2 - 27 octobre 2022	26
19 Centres étrangers J2 - 14 mars 2023	27
20 Métropole J1 - 20 mars 2023	28
21 Centres étrangers J1 - 21 mars 2023	29
22 Asie J1 - 23 mars 2023	30
23 La Réunion J1 - 28 mars 2023	32
24 Nouvelle-Calédonie J1 - 28 août 2023	33

25 Métropole J1 - 11 sept 2023	34
26 Métropole J2 - 12 sept 2023	35
27 Amérique du Sud J1 - 26 sept 2023	37
28 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2024	39
29 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2024	41
30 Asie – Sujet 2 – 11 juin 2024	42
31 Métropole – Sujet 1 – 19 juin 2024	44
32 Métropole – Sujet 1 (secours) – 19 juin 2024	46
33 Métropole – Sujet 2 – 20 juin 2024	48
34 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025	50
35 Métropole – Sujet 1 – 17 juin 2025	52
36 Polynésie – Sujet 2 – 18 juin 2025	54
37 Métropole – Sujet 2 – 10 septembre 2025	55
38 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025	57
39 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025	58

1 Amérique du Nord 28 mai 2019

EXERCICE B

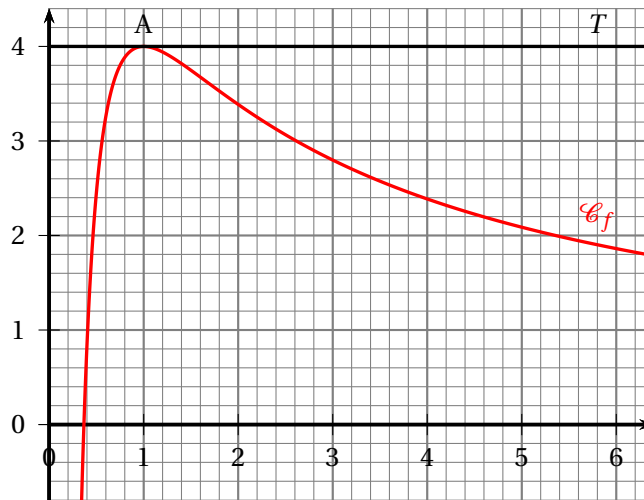
5 points

Principaux domaines abordés :

- Fonction logarithme népérien
- Convexité

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La courbe \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale T au point $A(1; 4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b .

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

2 Polynésie - 2 juin 2021

EXERCICE B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x.$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
 - a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

- b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 4]$.
 - c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1; 4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
 3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1; 4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1; 4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x \ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2. Pour tout x de l'intervalle $[1; 4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .
3.
 - a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1; 4]$.
 - b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

3 Asie 1 - 7 juin 2021

EXERCICE – A

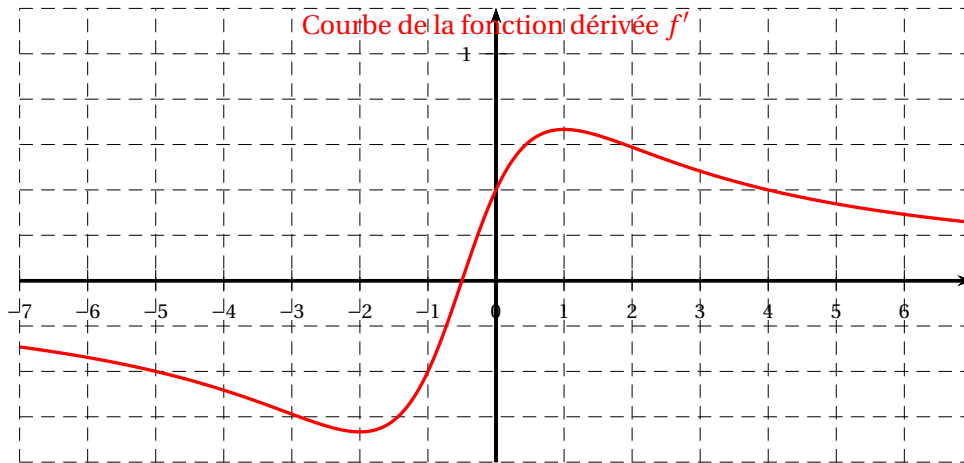
Principaux domaines abordés

- convexité
- fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2.
 - a. Donner les variations de la fonction dérivée f' .
 - b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln \left(x^2 + x + \frac{5}{2} \right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f . On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4.
 - a. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[$.
 - b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} . On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2} \right)^2}$.

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f .

4 Asie 2 - 8 juin 2021

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés

- Suites, étude de fonction
- Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x - 1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x - 1).$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2.
 - a. Soit f' la fonction dérivée de f . Montrer que pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-2}{x-1}$.
 - b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, complété par les limites.
 - c. Justifier que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout entier naturel n .
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ .

5 Métropole Antilles–Guyane La Réunion sujet 2 - 8 juin 2021

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme; dérivation

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0; +\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha; \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

6 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h . Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$. Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

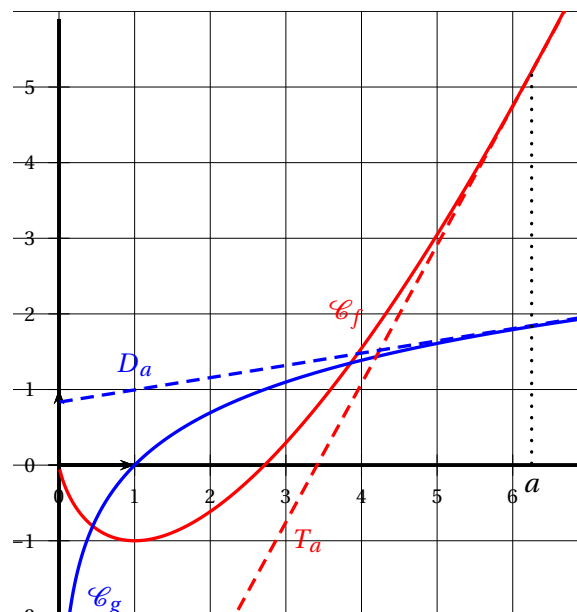
$$f(x) = x \ln(x) - x; \quad g(x) = \ln(x).$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à \mathcal{C}_f en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à \mathcal{C}_g en son point d'abscisse a .

Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



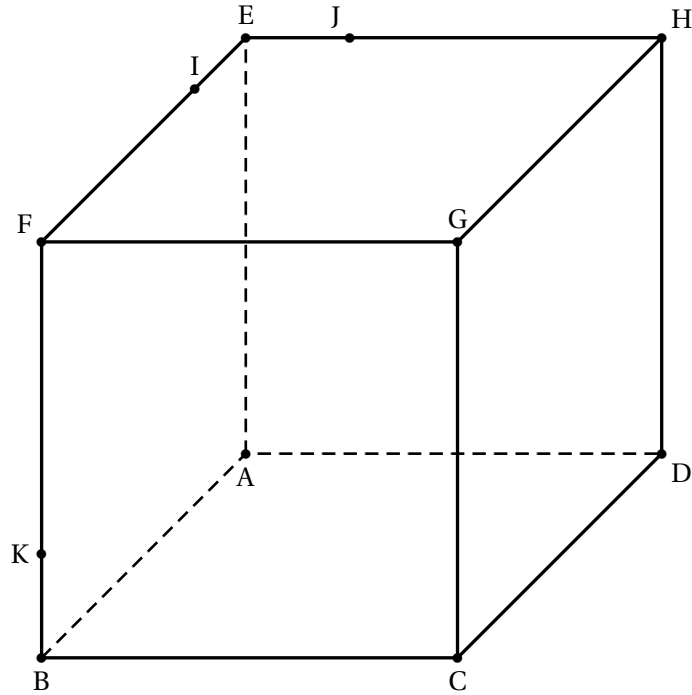
On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\frac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a , que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE**À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER
L'EXERCICE A**

7 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021

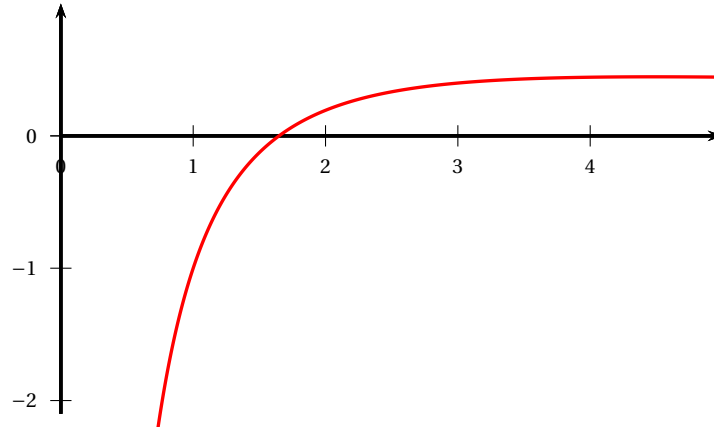
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie I

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction g en 0.
 - b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0; +\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

8 Centres étrangers 2 - 12 mai 2022

EXERCICE 2 7 points

Thèmes : Fonction logarithme et suite

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a. On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0 ; +\infty[$ et les limites.
 - c. Justifier que pour tout $x \in]0 ; 1[$, $f(x) \in]0 ; 1[$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0 ; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

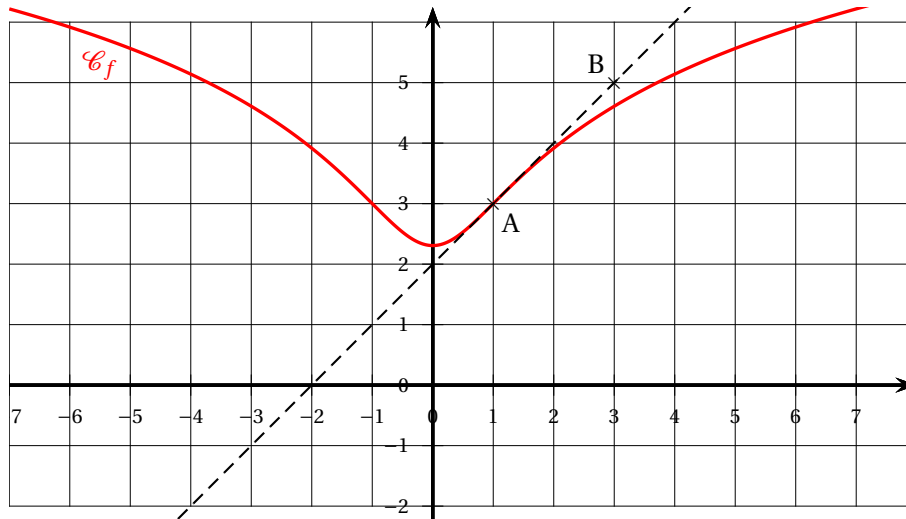
9 Asie 1 - 17 mai 2022

EXERCICE 4

7 points

Principaux domaines abordés : Étude de fonctions. Fonction logarithme.

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On considère les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$. On donne ci-dessous \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe \mathcal{C}_f au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par

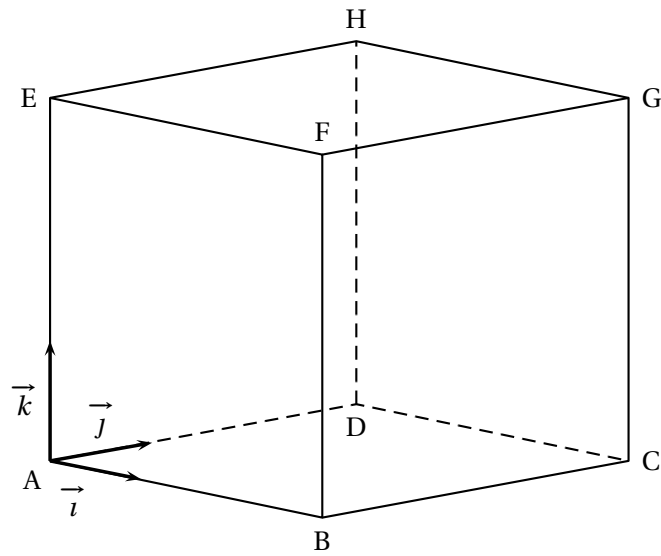
$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

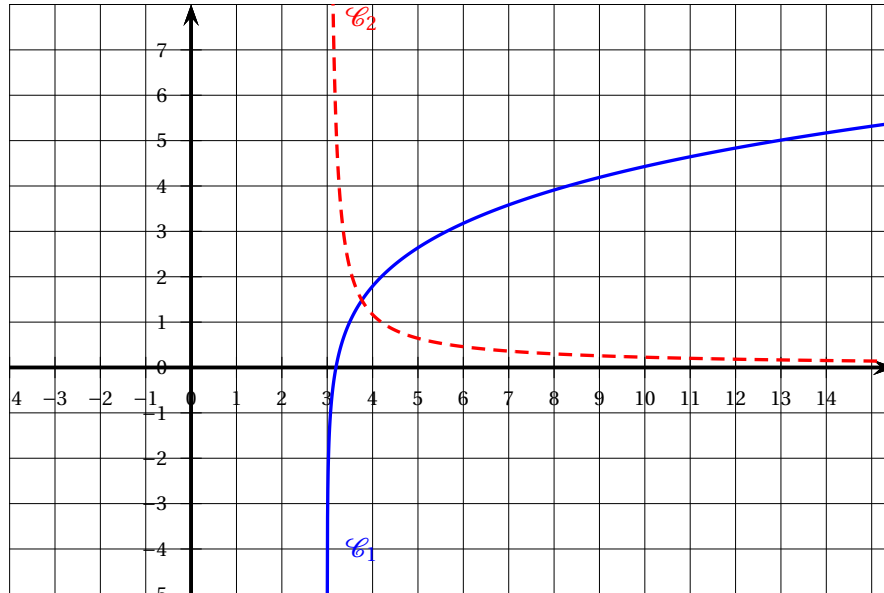
1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .
2. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a : $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

ANNEXE à rendre avec la copie

10 Asie 2 - 18 mai 2022**EXERCICE 2****7 points***Principaux domaines abordés* : Étude des fonctions. Fonction logarithme.**Partie A**

Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f' , toutes deux définies sur $]3; +\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f .

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3; +\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la partie A est définie par $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I . Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I .
En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I .
3.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I .
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I .
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I .
4.
 - a. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5; 6[$.
 - b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5.
 - a. Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur I .

11 Centres étrangers Groupe I J2 - 19 mai 2022

EXERCICE 4 6 points

Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction

logarithme; Suites

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0; 1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0; 1]$. On note f' sa fonction dérivée. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a $xe^{-x} < 1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0; 1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0; 1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

- a. Calculer a_1 et b_1 . On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- b. On considère ci-dessous la fonction termes, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
    a=1/10
    b=1
    for k in range(0,n) :
        c= ...
        b = ...
        a = c
    return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

2. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur \mathbb{R} .
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$$

- b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n) .
On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0; 1]$, et que $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$.
 - a. Démontrer que $f(A) = 0$.
 - b. Déterminer $A - B$.

13 Métropole J2 - 9 septembre 2022

Exercice 3 7 points

Thèmes : fonction logarithme, suites

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.

14 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022

EXERCICE 2 SUITES

7 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée `suite_u` et prend pour paramètre l'entier naturel p . Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n) .

```
def suite_u(p) :
    u= ...
    for i in range(1,...) :
        u =...
    return u
```

2.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 4$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3.
 - a. Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.
 - b. En déduire la valeur de ℓ .
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
 - b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.
 - c. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

15 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022

EXERCICE 3 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME

7 points

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

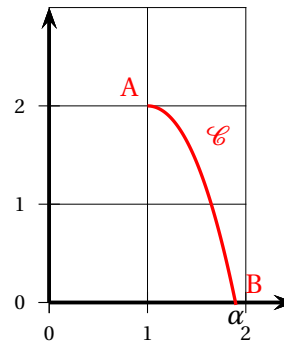
La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
3.
 - a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = -4x \ln(x)$.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$
 - c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Dédire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$. Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives 1 et α .
 - a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
 - b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $g(x) \geq \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$.



16 Amérique du Sud J2 - 27 septembre 2022

EXERCICE 2 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME

7 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie sur $]0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x - 1) - x \ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0 ; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0 ; +\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e ; +\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0 ; +\infty[$.

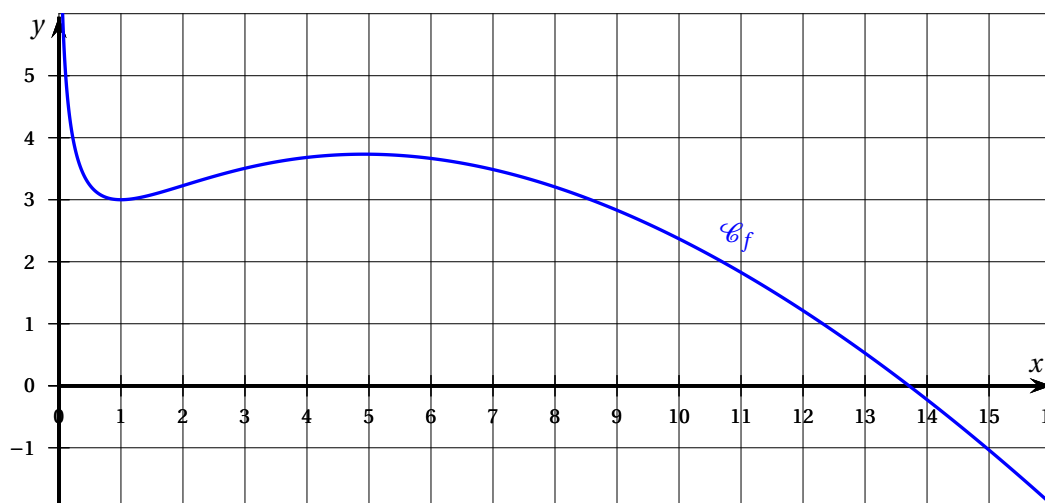
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f , définie sur $]0 ; +\infty[$, par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f .

La représentation graphique \mathcal{C}_f de cette fonction f est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2.
 - a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 - b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$.
Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de \mathcal{C}_f .

17 Nouvelle-Calédonie J1 - 26 octobre 2022**EXERCICE 1 7 points**

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.
4. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

- a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de \mathcal{C}_f .
- b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$.
Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t ; f(t))$.
En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe \mathcal{C}_f .

18 Nouvelle-Calédonie J2 - 27 octobre 2022**EXERCICE 2****7 points****Principaux domaines abordés :** fonctions, fonction logarithme.Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1.
 - a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
 - b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x = e$.
 - c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - d. En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la tangente T .
2.
 - a. Calculer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.
 - b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
5. On considère la fonction seuil suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien `ln`.

```
def seuil(pas) :
    x=4.3
    while x*log(x) - x - 2 < 0:
        x=x+pas
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

19 Centres étrangers J2 - 14 mars 2023**EXERCICE 2****6 points**

On considère la fonction f définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x + 3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $] -1,5 ; +\infty[$.
3.
 - a. Démontrer que, dans l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
 - b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.
2.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.

20 Métropole J1 - 20 mars 2023**EXERCICE 2****5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2 \left(1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
En déduire la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Montrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.
4. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0; +\infty[$.
5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0; 2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).
6. On admet que, sur l'intervalle $[2; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
7. Pour tout nombre réel k , on considère la fonction g_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

En s'aidant du tableau de variations de f , déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

21 Centres étrangers J1 - 21 mars 2023**EXERCICE 1****5 points****Partie A**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3.
 - a. Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
 - b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x} \ln(x).$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie C

Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la courbe représentative de la fonction \ln sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

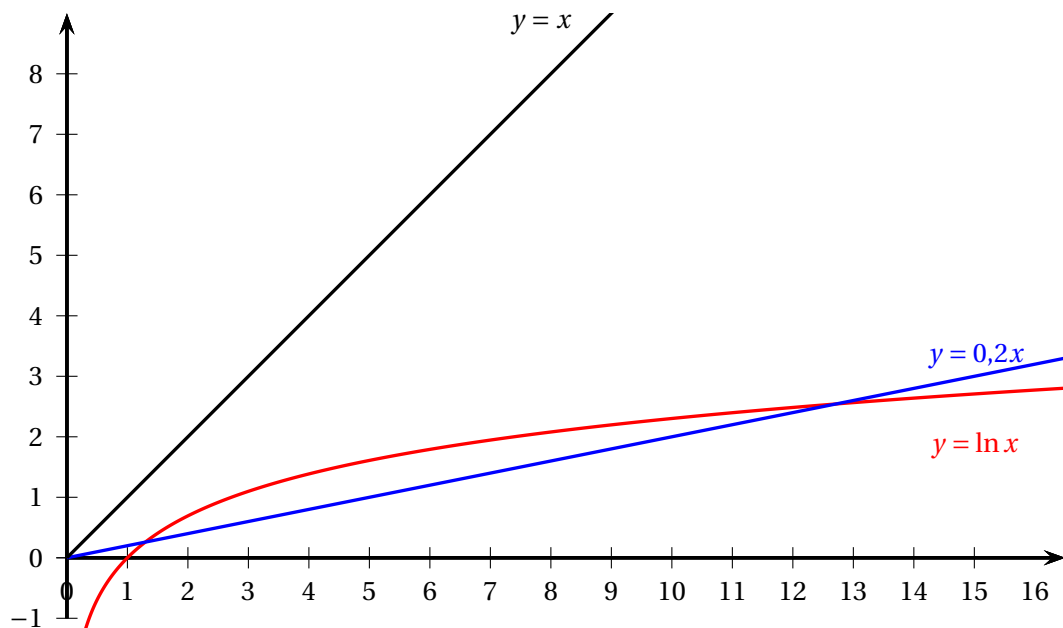
22 Asie J1 - 23 mars 2023**EXERCICE 3****5 points**Soit k un réel strictement positif.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln(x) = kx$$

de paramètre k .**1. Conjectures graphiques :**

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0,2x$:



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0,2$.

2. Étude du cas $k = 1$:On considère la fonction f , définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .**a.** Calculer $f'(x)$.**b.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.

Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.**3. Étude du cas général :** k est un nombre réel strictement positif.On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$-\infty$

- a. Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.
- b. Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k .
- c. Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.
- d. Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.
- e. Donner, selon les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.

23 La Réunion J1 - 28 mars 2023

EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2.
 - a. Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.
 - b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
3.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$. On notera α cette solution.
 - b. En déduire le signe de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On la note F .
Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty \right[$?
Justifier.
5.
 - a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
Quelle est la position de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à ses tangentes?
 - b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
 - c. Déduire des questions 5. a et 5. b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

24 Nouvelle-Calédonie J1 - 28 août 2023

EXERCICE 4 5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

- b.** En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de ses tangentes.
- c.** Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
(On admettra que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

- b.** En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f .

25 Métropole J1 - 11 sept 2023

EXERCICE 4

7 points

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[= I$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $(x^2 - 2x + 2)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0,5; 1]$, que l'on notera α .
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0; +\infty[= I$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[= I$ par :

$$f(x) = e^x \ln x.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :
pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f''(x) = e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \right)$.
2. On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = e^x \times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.
3.
 - a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur $]0; +\infty[$. Justifier.
 - b. Justifier que la courbe \mathcal{C}_f admet un unique point d'inflexion A.
 - c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Justifier.
4.
 - a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - b. Montrer que $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2} (1 - \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
 - c. Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.
 - d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

26 Métropole J2 - 12 sept 2023

EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

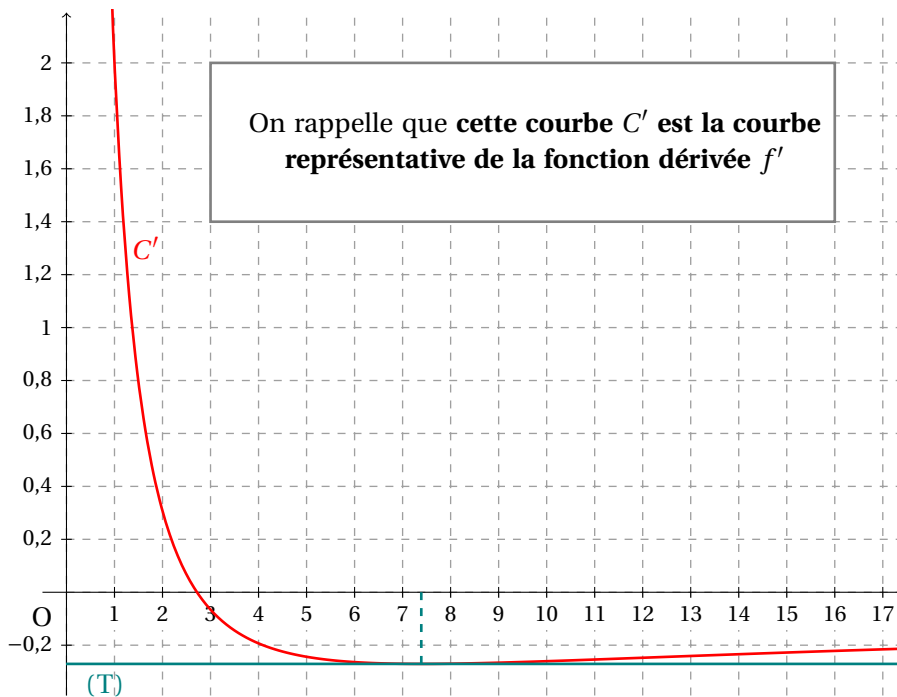
$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f' , fonction dérivée de la fonction f .

La **courbe** C' est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
 - a. le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
 - b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
2.
 - a. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.
4.
 - a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$.
 - b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.
Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C .

27 Amérique du Sud J1 - 26 sept 2023**Exercice 1****5 points****Partie A**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = -4x \ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; +\infty[$ et que $\alpha \in [1; e]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0; 1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import ** permet d'accéder à la fonction `ln`.

```

from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a=1
    b=2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else :
            a=(a+b)/2
    return (a,b)

```

Il écrit dans la console d'exécution :

```
>>> dichotomie(1)
```

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination)

- Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002)
 Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002)
 Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002)
 Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$.

2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.

On admet que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse α .

Déterminer, en fonction de α , les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α .

28 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2024

EXERCICE 3

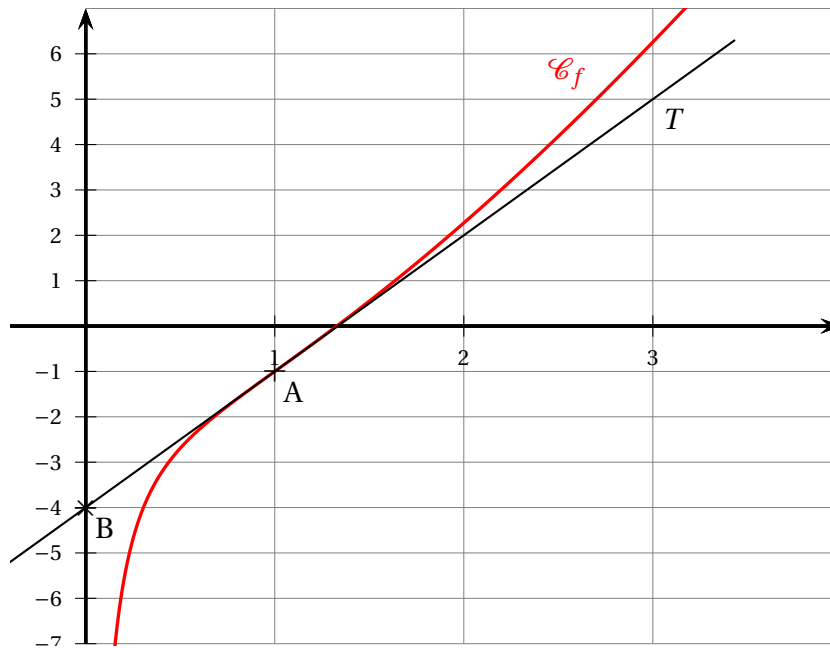
5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative (\mathcal{C}_f) de la fonction f , ainsi que la droite (T), tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point A de coordonnées $(1 ; -1)$. Cette tangente passe également par le point B $(0 ; -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe (\mathcal{C}_f) ?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3.
 - a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f' , puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- b.** Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

29 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2024

Exercice 4

4 points

Soit a un réel strictement positif.

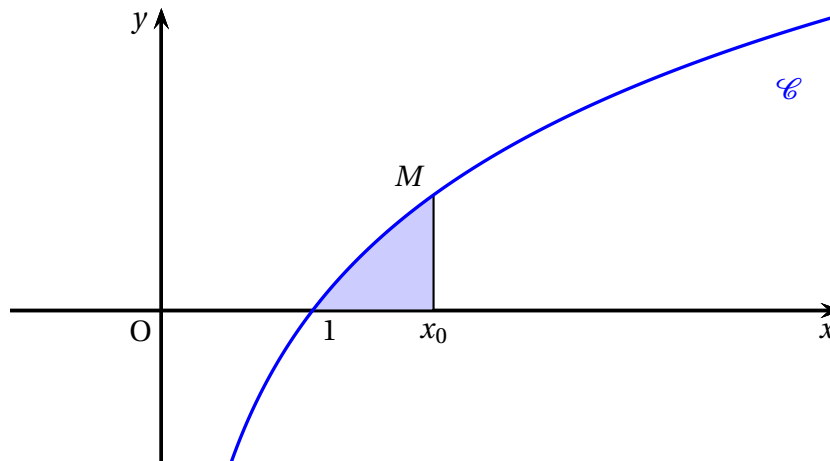
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = a \ln(x).$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

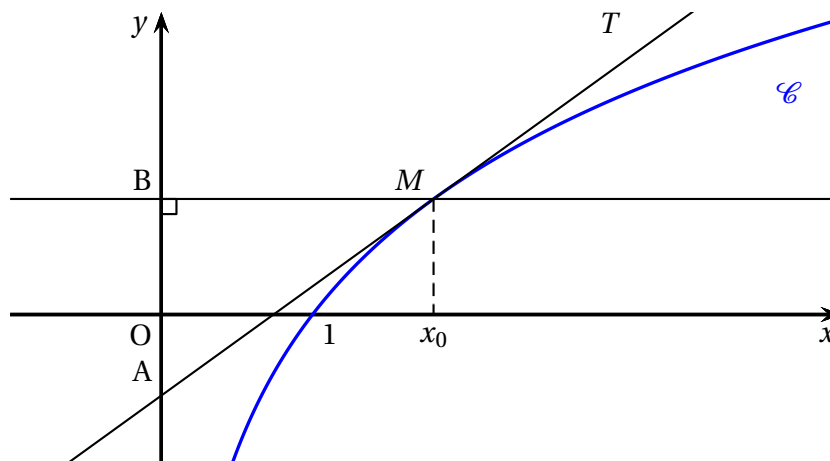
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x \ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0 .



On note T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'explicitier sa démarche.

30 Asie – Sujet 2 – 11 juin 2024**EXERCICE 1****5,5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0; +\infty[$.

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0; +\infty[$.

Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g .

Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

Résoudre, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ .

31 Métropole – Sujet 1 – 19 juin 2024

EXERCICE 4

6 points

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.
 - a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
 - c. Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - d. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.
 - b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g .

La fonction g est définie sur $]0 ; 1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0 ; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
2.
 - a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; \frac{1}{\alpha}[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
 - b. On admet le tableau de signes suivant :

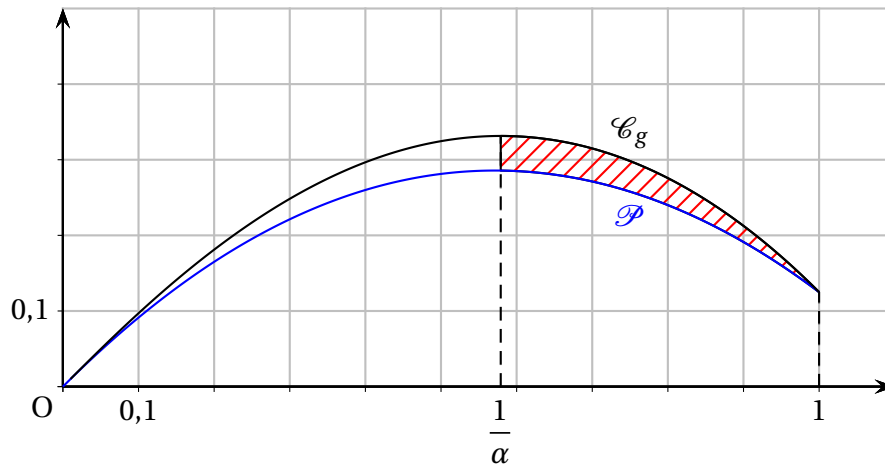
x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe \mathcal{C}_g de la fonction g ;
- La parabole \mathcal{P} d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire \mathcal{A} du domaine hachuré compris entre les courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{P} , et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et \mathcal{P} sur l'intervalle $]0 ; 1]$.
- b.** Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire \mathcal{A} .

32 Métropole – Sujet 1 (secours) – 19 juin 2024**EXERCICE 3****6 points****Partie A : étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1),$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n) .
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
5. a. Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leq h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```

from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
    n = 0
    u = 7
    while ... :
        n = n+1
        u = ...
    return n

```

- b.** Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x) dx.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2 ; 4]$, on a l'encadrement :

$$0,5x - 1 \leq f(x) \leq 0,25x + 0,25.$$

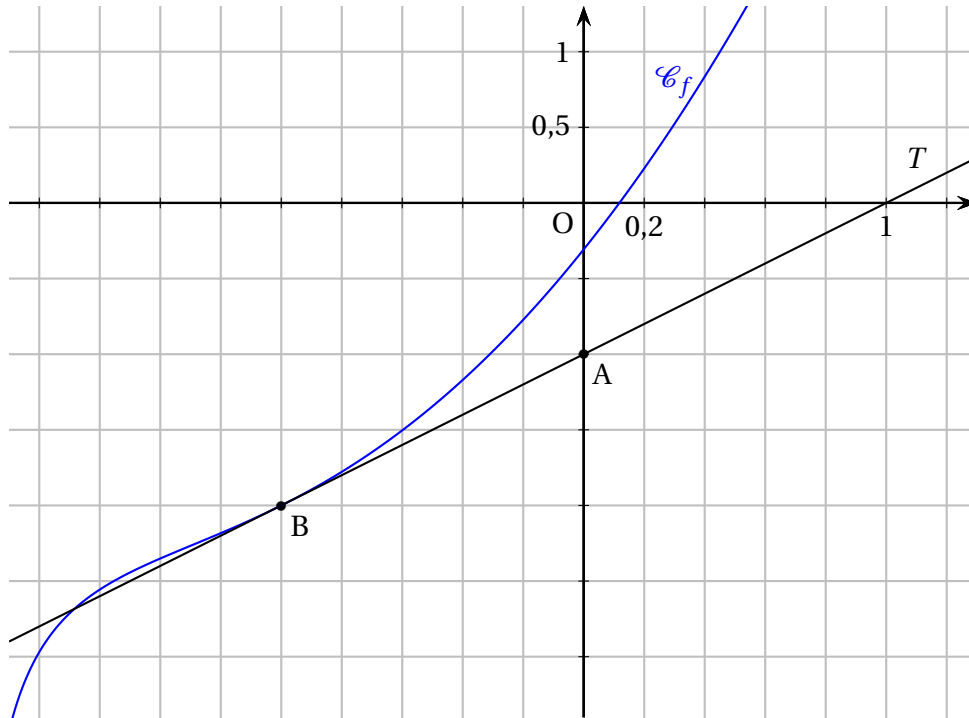
En déduire l'encadrement :

$$1 \leq I \leq 2.$$

33 Métropole – Sujet 2 – 20 juin 2024**EXERCICE 3****6 points**

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $] -2 ; +\infty[$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .
On précise que la droite T passe par le point A(0 ; -1).

**Partie A : exploitation du graphique**

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $] -2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2),$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2 .
Interpréter graphiquement ce résultat.
On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -2 ; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$.
6. Montrer que \mathcal{C}_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par

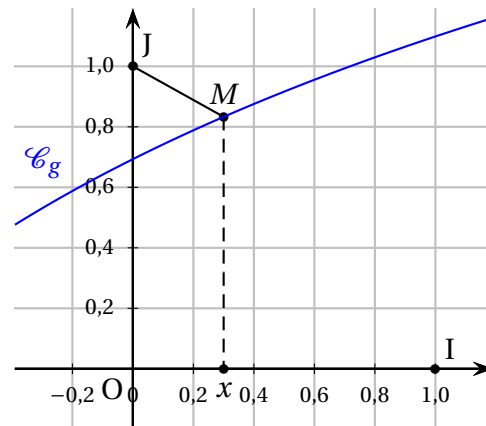
$$g(x) = \ln(x + 2).$$

On note \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représentée ci-contre.

Soit M un point de \mathcal{C}_g d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $] -2 ; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$$

où f est la fonction étudiée en partie B.

- a. Dresser le tableau de variations de h sur $] -2 ; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
- b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
3. On notera M_α le point de \mathcal{C}_g d'abscisse α .
 - a. Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
 - b. En déduire que la tangente à \mathcal{C}_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .

34 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025

EXERCICE 3

6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1 .
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2 ; 6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```

from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)

```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande $\log(x)$ renvoie la valeur $\ln x$;
 - la commande $c**d$ renvoie la valeur de c^d .
- a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`.
On donnera les valeurs arrondies au centième.
 - b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
3. On rappelle que le réel α , défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2; 6,5]$.
Justifier que $\ell = \alpha$.

35 Métropole – Sujet 1 – 17 juin 2025

EXERCICE 2

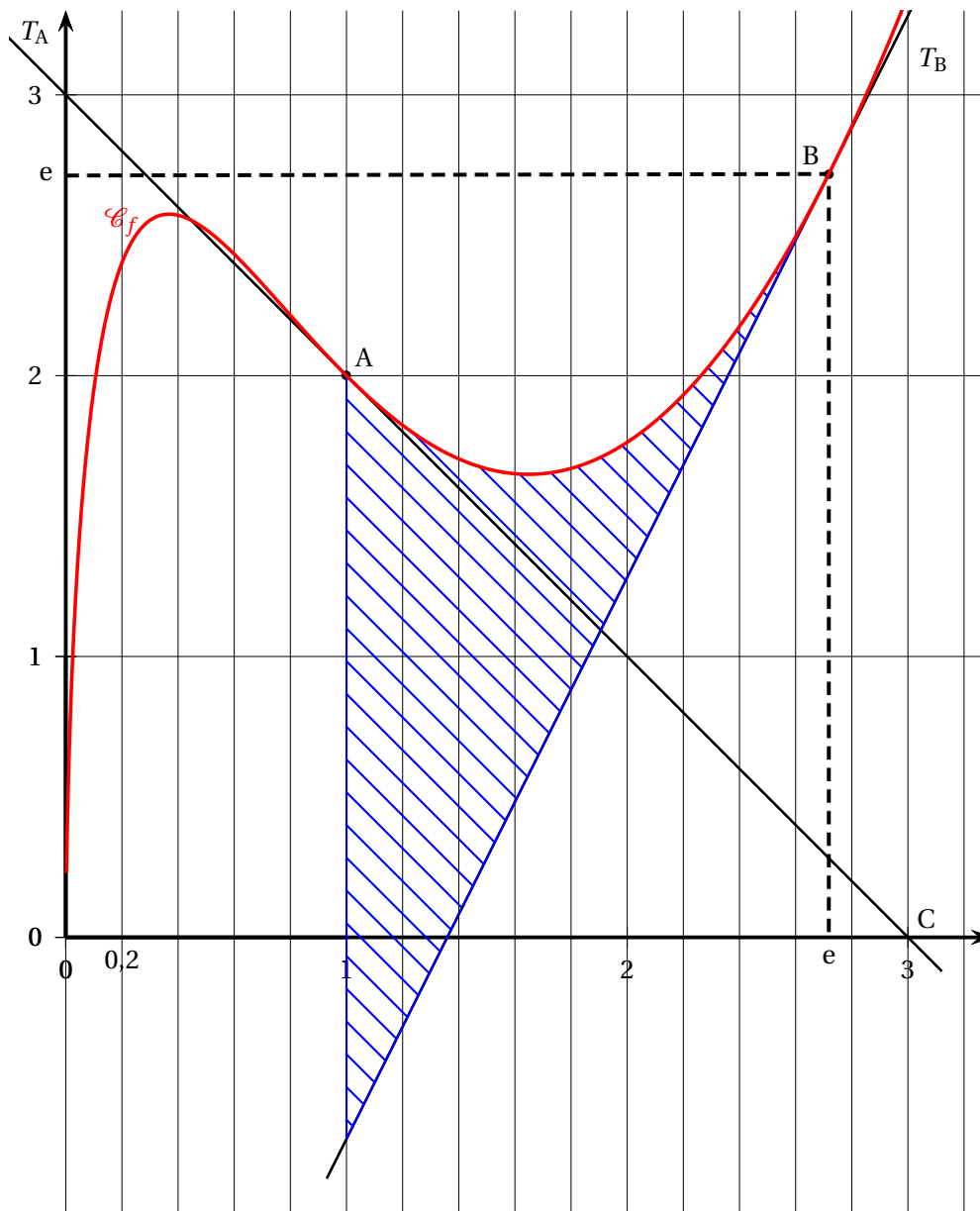
6 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée \mathcal{C}_f sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à \mathcal{C}_f au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B tangente à \mathcal{C}_f au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que \mathcal{C}_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
 - a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 - c. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3. On note \mathcal{A} l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe \mathcal{C}_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.

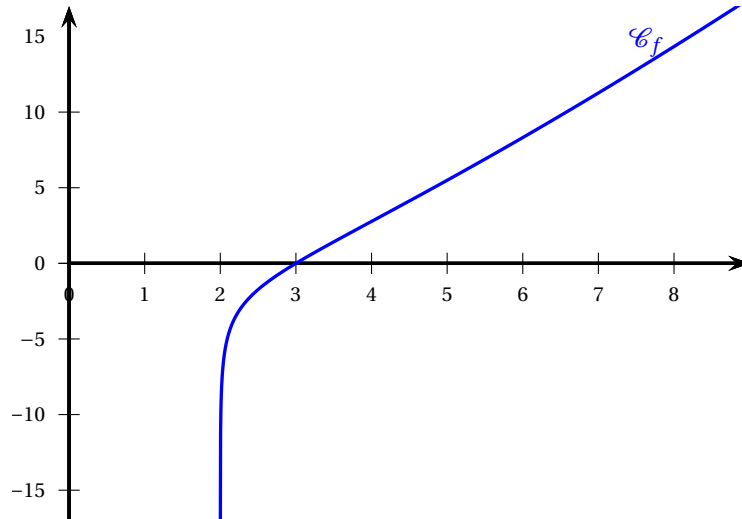
En déduire la valeur exacte de \mathcal{A} en unité d'aire.

36 Polynésie – Sujet 2 – 18 juin 2025**EXERCICE 2****5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2; +\infty[$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2; +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.
 - a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

- b. On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2; +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .
 - c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2; +\infty[$, $g(x) > 0$.
 - d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2; +\infty[$.
6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .
 7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

37 Métropole – Sujet 2 – 10 septembre 2025

EXERCICE 3

4 points

On considère la fonction f définie sur $]0; 8]$ par

$$f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$$

Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0; 8]$, on a $f(x) \geq 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

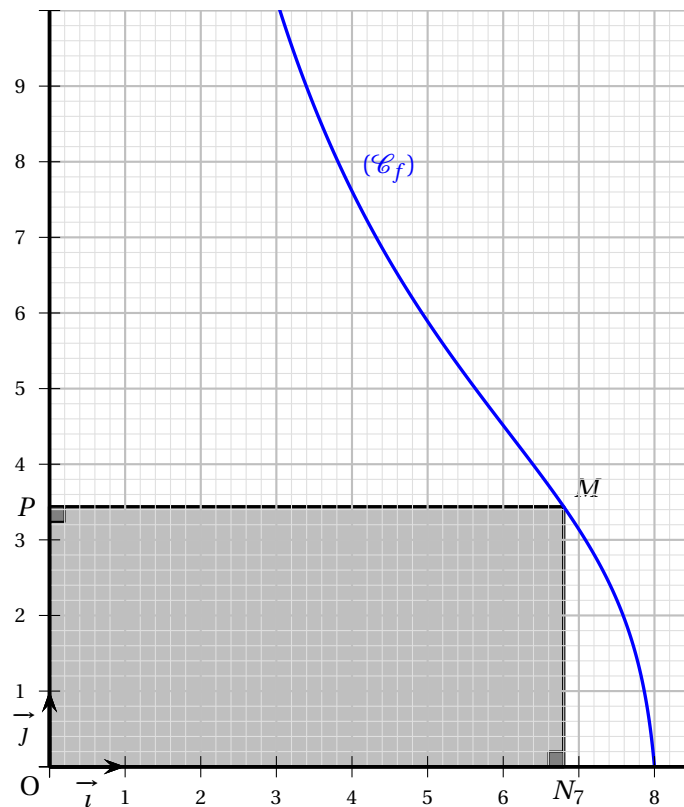
Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.

Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0; 8]$.

On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle $ONMP$.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x .
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 8]$,

$$\mathcal{A}(x) = 10 \ln(-x^2 + 7x + 9)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle laire du rectangle $ONMP$ est maximale? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k .

On souhaite déterminer la plus petite valeur de x , approchée au dixième, appartenant à $[3,5; 8]$ pour laquelle laire $\mathcal{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k .

Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.

Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit `log(x)`.

```
1  from math import *
2
3  def A(x) :
4      return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)
5
6  def pluspetitevaleur(k) :
7      x = 3.5
8      while A(x)..... :
9          x = x + 0.1
10     return .....
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.
2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)`?
3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.

38 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025**EXERCICE 3****5 points**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $f(2 \ln(2)) = 2 \ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6.
 - a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.
 - b. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation $f(x) = x$.
- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

39 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025

EXERCICE 4

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude 0,01.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe \mathcal{C}_g d'abscisse x . On note OM la distance entre les points O et M.

- a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .
- b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .
- c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe \mathcal{C}_g . On note d cette distance.
Exprimer d à l'aide de α .

