5. Suites

1 $u_0 = 5$; $u_1 = 6$; $u_2 = 9$; $u_3 = 14$; $u_4 = 21$.

2 $v_0 = 3$; $v_1 = 2{,}5$; $v_2 = 2{,}25$; $v_3 = 2{,}125$; $v_4 = 2{,}0625$.

3 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{2}{n+1}$.

4 Pour tout entier $n \geqslant 2$,
$v_{n+2} = 3v_{n+1} + 2 = 3(3v_n + 2) + 2 = 9v_n + 8$.

6 **a.** Soit u_n le nombre d'arbres que compte la forêt au bout de n années.
$u_0 = 50\,000$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3000$.
b. $u_{10} \approx 54\,012$ arbres (par défaut).
c. Le nombre d'arbres dépasse les 55 000 au bout de 14 années.
$u_{13} = 54\,866$ et $u_{14} = 55\,123$

7 Elle semble croissante.

8 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 3x + 4$. $3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = g(n)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = -2x^2 - x + 3$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = -4x - 1 < 0$, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La suite (v_n) est donc strictement décroissante.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = h(n)$, où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$, donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. La suite (w_n) est donc strictement croissante.

9 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 4 - 3n - 4 = 3 > 0$.
La suite (u_n) est donc strictement croissante.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 2n + 4 > 0$.
La suite (v_n) est donc strictement croissante.

10 **a.** La suite (u_n) est strictement positive.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3n+7}{3n+4} > 1$.
La suite (u_n) est donc strictement croissante.
b. La suite (v_n) est strictement positive.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 > 1$.
La suite (v_n) est donc strictement croissante.
c. La suite (w_n) est strictement positive.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\frac{3}{n+3}}{\frac{3}{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+3} < 1$.
La suite (w_n) est donc strictement décroissante.

11 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1480 \times 0{,}95^{n+1} + 1520 - 1480 \times 0{,}95^n - 1520$
$= 1480 \times 0{,}95^n \times (0{,}95 - 1) < 0$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

12 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + 3n$.
c. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 11 \times \dfrac{u_0 + u_{10}}{2}$
$= 11 \times \dfrac{5 + 35}{2} = 220$

13 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times 0{,}5^n$.
c. $v_0 + v_1 + \ldots + v_{10} = 2 \times \dfrac{1 - 0{,}5^{11}}{1 - 0{,}5} = 4(1 - 0{,}5^{11})$

14 **1.** $\dfrac{23\,000\,000}{53700} \approx 428 > 365$.
En 2017, la maire est déçue, car les habitants de sa commune ont produit en moyenne plus de déchet que la moyenne française.
2.a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n - \dfrac{1{,}5}{100}d_n = 0{,}985d_n$.
Alors la suite (d_n) est géométrique de raison $q = 0{,}985$ et de premier terme $d_0 = 400$.
b. $q = 0{,}985 \in]0 ; 1[$ et $d_0 = 400 > 0$, donc la suite (d_n) est bien strictement décroissante.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = 400 \times 0{,}985^n$.
d. $2022 = 2018 + 4$.
$d_4 = 400 \times 0{,}985^4 \approx 376{,}53$.
À ce rythme, en 2022, la production de déchets par habitant sera environ de 376 kg.

Exercice Bilan 1

1. $a_1 = 2\ 000 + 0.02 \times 2000 - 100 = 1940$
   $a_2 = 1940 + 0.02 \times 1940 - 100 = 1878.8$

2. a. $a_{n+1} = a_n + 0.02a_n - 100 = 1{,}02a_n - 100$ pour tout entier naturel n.
   b. Méthode à maitriser absolument :

   On a : $b_n = a_n - 5000$

   On passe au rang supérieur : $b_{n+1} = a_{n+1} - 5000$

   On substitue a_{n+1} par son expression donnée en 2.a.
   $b_{n+1} = 1{,}02a_n - 100 - 5000$
   $b_{n+1} = 1{,}02a_n - 5100$
   On factorise par le nombre devant a_n systématiquement
   $b_{n+1} = 1{,}02 \times \left(a_n - \frac{5100}{1{,}02}\right) = 1{,}02(a_n - 5000)$
   On remarque que b_n réapparait :
   $b_{n+1} = 1{,}02b_n$
   La suite (b_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $b_0 = a_0 - 5000 = -3000$
   d. $b_n = b_0 \times q^n = -3000 \times 1{,}02^n$ pour tout entier naturel n.
   et $b_n = a_n - 5000 \Leftrightarrow a_n = b_n + 5000 \Leftrightarrow a_n = -3000 \times 1{,}02^n + 5000$
3. A la calculatrice, on cherche n pour $a_n = 0$.
   $a_{25} \approx 78$ et $a_{26} \approx -20$. Au bout de 26 jours, les algues auront disparues.

Exercice Bilan 2

1. $r_{n+1} = r_n - \frac{10}{100}r_n + \frac{5}{100}c_n = 0{,}9r_n + 0{,}05c_n$
   $c_{n+1} = c_n - \frac{5}{100}c_n + \frac{10}{100}r_n = 0{,}95c_n + 0{,}1r_n$
2. $s_n = r_n + c_n$
   $s_{n+1} - s_n = r_{n+1} + c_{n+1} - (r_n + c_n)$
   $s_{n+1} - s_n = 0{,}9r_n + 0{,}05c_n + 0{,}95c_n + 0{,}1r_n - r_n - c_n$
   $s_{n+1} - s_n = 0$
   (s_n) est constante et $s_n = r_0 + c_0 = 90 + 30 = 120$
3. $c_n = s_n - r_n = 120 - r_n$
   $r_{n+1} = 0{,}9r_n + 0{,}05c_n = 0{,}9r_n + 0{,}05(120 - r_n) = 0{,}85r_n + 6$ pour tout entier naturel n.
4. Même méthode que dans l'exercice bilan 1 :

   $$w_{n+1} = r_{n+1} - 40 = 0{,}85r_n + 6 - 40 = 0{,}85r_n - 34 = 0{,}85\left(r_n - \frac{34}{0{,}85}\right) = 0{,}85(r_n - 40)$$

   $w_{n+1} = 0{,}85w_n$
   (w_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $w_0 = r_0 - 40 = 50$
5. $w_n = 50 \times 0{,}85^n$ $\quad$ $r_n = w_n + 40 = 50 \times 0{,}85^n + 40$
   $c_n = 120 - r_n = 120 - (50 \times 0{,}85^n + 40) = 80 - 50 \times 0{,}85^n$
6. a.

```
r ← 90
n ← 0
Tant que r ≥ 45
    r ← 0,85r+6
    n ← n+1
Fin Tant que
Afficher n
```

   b.

```
def rurale() :
  r=90
  n=0
  While r >=45 :
     r = 0,85*r+6
     n=n+1
   return(n)
```