SUITES NUMERIQUES

Rappels

Modes de génération d'une suite

- Une suite (u_n) est une **fonction définie sur $\mathbb{N}$** ou sur une partie de $\mathbb{N}$.
- Une suite peut être définie :

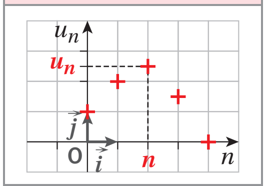
– par une **formule explicite**, du type $u_n = f(n)$, qui donne chaque terme en fonction de son indice ;

– par une **formule récurrente**, du type $u_{n+1} = f(u_n)$, qui donne chaque terme en fonction du terme précédent.

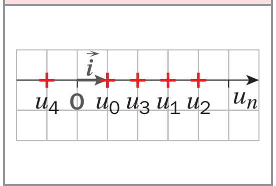
u_n est le terme d'indice n.

Représentation graphique d'une suite

Dans un repère



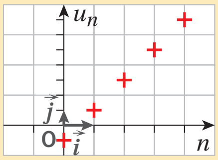
Sur une droite graduée



Exemples

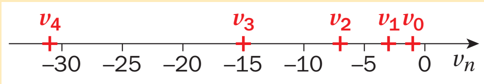
- (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$.
Cette suite est définie par une **formule explicite**.
On peut calculer ses termes directement, et la représenter **dans un repère** :

$u_0 = 2 \times 0 - 1 = -1$;
$u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$;
$u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$;
$u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$;
$u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$.



- (v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Cette suite est définie par une **formule récurrente**. On peut calculer ses termes de proche en proche, et la représenter **sur une droite graduée** :

$v_1 = 2 \times v_0 - 1 = -3$; $v_2 = 2 \times v_1 - 1 = -7$;
$v_3 = 2 \times v_2 - 1 = -15$; $v_4 = 2 \times v_3 - 1 = -31$.



Sens de variation d'une suite

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, alors (u_n) est **croissante** sur $\mathbb{N}$.	Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, alors (u_n) est **décroissante** sur $\mathbb{N}$.	Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, alors (u_n) est **constante** sur $\mathbb{N}$.

Une suite (strictement) **monotone** est une suite qui est soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante, soit constante.

Exemples

- (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
Cette suite est définie par une formule du type $u_n = f(n)$, où f est la **fonction** définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante.
La suite (u_n) est donc strictement croissante.

- (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 2n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n} = -2n \leqslant 0$, donc $v_{n+1} \leqslant v_n$.
La suite (v_n) est donc décroissante.
- (t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = 0{,}9^n$.
Elle est strictement positive sur $\mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{0{,}9^{n+1}}{0{,}9^n} = 0{,}9 < 1$, donc $t_{n+1} < t_n$.
La suite (t_n) est donc strictement décroissante.

Suites arithmétiques et géométriques

	Formule récurrente	Formule explicite	Somme de termes
Suite arithmétique	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$	$u_0 + \ldots + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$
Suite géométrique	$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$	$v_0 + \ldots + v_n = v_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $(q \neq 1)$

Modes de génération d'une suite

1 Calculer les cinq premiers termes de la suite définie sur ℕ par $u_n = n^2 + 5$.

2 Calculer les cinq premiers termes de la suite définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + 0{,}5v_n$.

3 (u_n) est la suite définie sur ℕ* par $u_n = 5 - \frac{2}{n}$.

- Donner une expression réduite de u_{n+1} en fonction de n.

4 (v_n) est la suite définie par $v_2 = 3$ et, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$, $v_{n+1} = 3v_n + 2$.

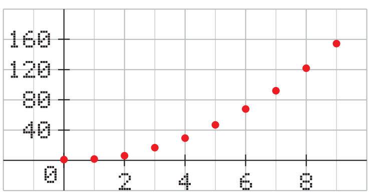
- Donner une expression réduite de v_{n+2} en fonction de v_n.

6 Une forêt compte 50 000 arbres. Afin d'améliorer son entretien, elle est confiée à un organisme régional. Ce dernier décide que, chaque année, 5 % des arbres seront abattus et 3 000 seront replantés.

a. À l'aide d'une suite, modéliser cette situation.
b. Estimer le nombre d'arbres au bout de 10 ans.
c. Déterminer à la calculatrice le nombre d'années au bout desquelles le nombre d'arbres dépasse 55 000.

Sens de variation d'une suite

7 Une suite, définie sur ℕ, est représentée ci-dessous à l'écran d'une calculatrice.



- Conjecturer la monotonie éventuelle de cette suite.

8 À l'aide d'une étude de fonction, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.
a. (u_n) est définie sur ℕ par $u_n = 3n + 4$.
b. (v_n) est définie sur ℕ par $v_n = -2n^2 - n + 3$.
c. (w_n) est définie sur ℕ par $w_n = \frac{n-1}{n+1}$.

9 À l'aide d'une différence de termes, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) est définie sur ℕ par $u_n = 3n + 4$.

b. (v_n) est définie par $v_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 4$.

10 À l'aide d'un quotient de termes, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) est définie sur ℕ par $u_n = 3n + 4$.

b. (v_n) est définie sur ℕ par $v_n = 2 \times 3^n$.

c. (w_n) est définie sur ℕ par $w_n = \frac{3}{n+2}$.

11 Étudier les variations de la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.

Suites arithmétiques et géométriques

12 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.
a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
b. Exprimer u_n en fonction de n.
c. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

13 (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 0,5.
a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
c. Calculer $v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$.

14 D'après l'ADEME, en 2017, les Français ont en moyenne produit 365 kg de déchets ménagers par habitant. Ayant constaté, avec déception, que ses admi-nistrés ont produit 23 000 tonnes de déchets en 2017, la maire d'une commune de 53 700 habitants a décidé de mettre en place une nouvelle campagne de recyclage des déchets valo-risables. Cela a permis à la ville d'atteindre, en 2018, 400 kg de déchets en moyenne par habitant et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant cinq ans.

1. Justifier la déception de la maire en 2017.

2. Pour tout nombre entier naturel n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets par habitant de cette ville durant l'année 2018 + n. On a donc $d_0 = 400$.
a. Justifier que la suite (d_n) est géométrique et en préciser le premier terme et la raison.
b. En déduire que la production est bien décroissante.
c. En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de d_n en fonction de n.
d. Quelle sera, à ce rythme, la production de déchets par habitant en 2022 ?

Protocoles médicaux

But : Étudier l'évolution d'une quantité de médicament dans l'organisme d'un patient

Un laboratoire pharmaceutique souhaite comparer deux protocoles d'administration de solutions médicamenteuses.

PARTIE A. Injection seule

Le premier protocole consiste à injecter initialement 2 mL de produit de type A au patient.
On estime que, par la suite, 5 % du produit présent dans l'organisme est évacué à chaque heure écoulée.
On note a_n le volume du produit restant au bout de n heures écoulées, exprimé en mL.

1. Donner les valeurs de a_0, a_1 et a_2.

2. Donner une formule de récurrence vérifiée par la suite (a_n).

3. À l'aide de la fonction Python `a(n)` ci-contre, donner une évaluation de la quantité de produit présente dans l'organisme du patient au bout de 6 heures.

```
def a(n):
    m=2
    for k in range(n):
        m=m*0.95
    return m
```

4. a. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Pour tout entier naturel n, en déduire l'expression de a_n en fonction de n.
b. En déduire une autre méthode pour définir la fonction Python `a(n)`.

Aide : En python, on calcule x^n avec la saisie `x**n`.

5. Le produit devient inefficace lorsque son volume présent dans l'organisme devient inférieur à 0,1 mL.
À l'aide de la fonction Python `efficacite(M)` ci-contre, donner une estimation du nombre d'heures au bout duquel le produit ne sera plus efficace.

```
def efficacite(M):
    n=0
    while a(n)>M:
        n=n+1
    return n
```

PARTIE B. Injection et perfusion

On considère maintenant un protocole qui consiste à injecter 1,8 mL de produit de type B au patient et à maintenir le produit en perfusion, réinjecté toutes les heures. À chaque heure écoulée, 10 % du produit est évacué par l'organisme et on réinjecte 0,04 mL de produit.
On note b_n le volume de produit restant au bout de n heures écoulées, exprimé en mL.

1. Donner les valeurs de b_0, b_1 et b_2.

2. Donner une formule de récurrence vérifiée par la suite (b_n).

3. a. Écrire une fonction Python `b(n)` qui renvoie le volume de produit restant au bout de n heures.
b. Quel est le volume de produit B présent dans l'organisme du patient au bout de 6 heures ?

PARTIE C. Comparaison des protocoles

On administre simultanément et séparément chacun des deux produits de types A et B à deux patients, en suivant les protocoles décrits précédemment.

1. Écrire une fonction Python qui renvoie le premier rang N à partir duquel on a $a_N < b_N$.

2. Donner une interprétation de la valeur renvoyée par cette fonction pour la situation concrète étudiée.

Exercice Bilan 1 *Temps indicatif : 40 minutes*

Prérequis : Suites numériques

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit. Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est égale à 2 000 kg. On modélise la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours par une suite notée (a_n).
En particulier : $a_0 = 2\,000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est égale à 1 878,8 kg.

2. On affirme que pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 1{,}02a_n - 100$.
a. Justifier la relation précédente à l'aide de l'énoncé.
b. On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $b_n = a_n - 5\,000$.
Démontrer que la suite (b_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
c. Pour tout entier naturel n, en déduire une expression de b_n en fonction de n, puis montrer que $a_n = 5\,000 - 3\,000 \times 1{,}02^n$.
d. Quelle quantité d'algues y aura-t-il au bout de 20 jours (arrondir au kg) ?

3. Au bout de combien de jours les algues auront-elles disparu ?

Exercice Bilan 2 *Temps indicatif : 40 minutes*

Prérequis : Suites numériques • Programmation Python

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :
- en 2018, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note r_n la population en zone rurale exprimée en millions d'habitants, en l'année $2018 + n$, et c_n la population en ville exprimée en millions d'habitants, en l'année $2018 + n$.
On a donc $r_0 = 90$ et $c_0 = 30$.

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} r_{n+1} = 0{,}9r_n + 0{,}05c_n \\ c_{n+1} = 0{,}95c_n + 0{,}1r_n \end{cases}$$

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $s_n = r_n + c_n$. Montrer que (s_n) est une suite constante.

3. Déduire des questions précédentes que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $r_{n+1} = 0{,}85r_n + 6$.

4. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n = r_n - 40$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, en déduire l'expression de w_n, puis de r_n et c_n en fonction de n.

6. On cherche à déterminer la première année pour laquelle la population rurale sera inférieure à 45 millions d'habitants.

a. Écrire un algorithme permettant de déterminer cette année.
b. Traduire cet algorithme par une fonction en langage Python, puis donner la valeur renvoyée par la fonction.