Chapitre 1. Suites

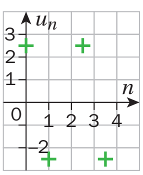
Les incontournables

37 **a.** $u_3 = -5{,}5(3-2)+4 = -1{,}5$;
$u_6 = -5{,}5(6-2)+4 = -18$.
b. $v_3 = 2\sqrt{4} = 4$; $v_6 = 2\sqrt{7}$.
c. $w_3 = 5 \times 3^2 - 2 \times 3 + 6 = 45$;
$w_6 = 5 \times 6^2 - 2 \times 6 + 6 = 174$.
d. $t_3 = 1 + \dfrac{2}{3+1} = 1{,}5$; $t_6 = 1 + \dfrac{2}{6+1} = \dfrac{9}{7}$.

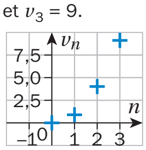
38 **a.** $u_0 = 0$; $u_1 = 1{,}5$; $u_2 = 3$; $u_3 = 4{,}5$ et $u_4 = 6$.
b. $v_1 = 1$; $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $v_4 = \dfrac{1}{2}$ et $v_5 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
c. $w_0 = 1$; $w_1 = 9$; $w_2 = 25$; $w_3 = 49$ et $w_4 = 81$.
d. $t_2 = -3$; $t_3 = -1{,}5$; $t_4 = -1$; $t_5 = -0{,}75$ et $t_6 = -0{,}6$.

39

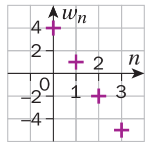
a. $u_0 = 2{,}5$;
$u_1 = -2{,}5$; $u_2 = 2{,}5$
et $u_3 = -2{,}5$.



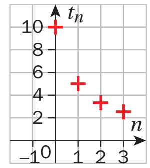
b. $v_0 = 0$;
$v_1 = 1$;
$v_2 = 4$
et $v_3 = 9$.



c. $w_0 = 4$; $w_1 = 1$;
$w_2 = -2$ et $w_3 = -5$.

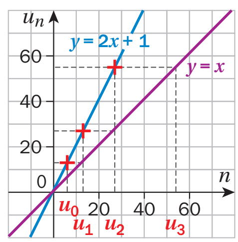


d. $t_0 = 10$; $t_1 = 5$;
$t_2 = \dfrac{10}{3}$ et $t_3 = 2{,}5$.



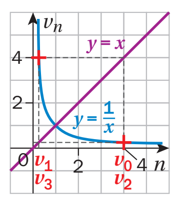
40 **a.** $u_0 = 6$; $u_1 = 4$; $u_2 = \dfrac{8}{3}$; $u_3 = \dfrac{16}{9}$ et $u_4 = \dfrac{32}{27}$.
b. $v_0 = -2$; $v_1 = 6$; $v_2 = -2$; $v_3 = 6$ et $v_4 = -2$.
c. $w_1 = 1$; $w_2 = 2$; $w_3 = 6$; $w_4 = 39$ et $w_5 = 1\,525$.
d. $t_2 = 0$; $t_3 = 1$; $t_4 = \sqrt{2}$; $t_5 = \sqrt{3}$ et $t_6 = 2$.

41 **a.**



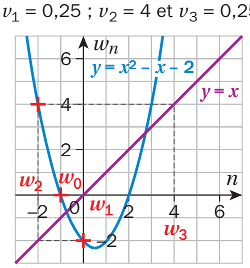
$u_0 = 6$; $u_1 = 13$; $u_2 = 27$ et $u_3 = 55$.

b.



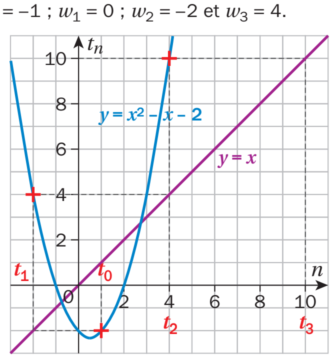
$v_0 = 4$; $v_1 = 0{,}25$; $v_2 = 4$ et $v_3 = 0{,}25$.

c.



$w_0 = -1$; $w_1 = 0$; $w_2 = -2$ et $w_3 = 4$.

d.



$t_0 = 1$; $t_1 = -2$; $t_2 = 4$ et $t_3 = 10$.

42 $u_{n+1} = 3 \times u_n^2$

43 $u_0 = 195$ et $u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 5$.

44 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} - u_n = 8(n+1) + 3 - (8n+3)$
$= 8 > 0$
donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} - v_n = 6(n+1)^2 - 2(n+1) + 5 - (6n^2 - 2n + 5)$
$= 12n + 4 > 0$
donc (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{4}{n^2} < 0$
donc (w_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

45 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1+2}{n+2} = 1 + \dfrac{1}{n+2} > 1$
donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et
$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1{,}5 \times 0{,}5^{n+1}}{1{,}5 \times 0{,}5^n} = 0{,}5 < 1$
donc (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$ et
$\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{0{,}5 \times 1{,}5^{n+1}}{0{,}5 \times 1{,}5^n} = 1{,}5 > 1$
donc (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$ et
$\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{5}{n+2} \times \dfrac{n+1}{5} = \dfrac{n+1}{n+2} < 1$
donc (t_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

46 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n = f(n)$ avec $f(x) = 7 - 3x$. f est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7{,}3 = f(n)$ avec $f(x) = 7{,}3$. f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc (v_n) est constante sur $\mathbb{N}$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 9n^2 + 6n + 3 = f(n)$ avec $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$. D'après le graphique, f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, donc (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Chapitre 2. Suites arithmétiques et géométriques

Les incontournables

40 **a.** $u_1 = -(-7) + 22{,}5 = 29{,}5$ et $u_2 = -29{,}5 + 22{,}5 = -7$. $u_1 - u_0 = 36{,}5$ et $u_2 - u_1 = -36{,}5$. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}$ non constant, donc (v_n) n'est pas arithmétique.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{3}$ constant, donc (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

d. $t_1 = 3{,}2 \times 44 = 140{,}8$ et $t_2 = 3{,}2 \times 140{,}8 = 450{,}56$.
$t_1 - t_0 = 96{,}8$ et $t_2 - t_1 = 309{,}76$. $t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1$ donc (t_n) n'est pas arithmétique.

41 **a.** $u_0 = 1$; $u_1 = 16$ et $u_2 = 49$.
$u_1 - u_0 = 15$ et $u_2 - u_1 = 33$.
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

b. $v_n = 22n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $v_0 + nr$, donc (v_n) est arithmétique de raison $r = 22$ et de premier terme $v_0 = 0$.

c. $w_n = n + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $w_0 + nr$, donc (w_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $w_0 = 1$.

d. $t_1 = -4{,}8$; $t_2 = 4{,}8$ et $t_3 = -4{,}8$.
$t_2 - t_1 = 9{,}6$ et $t_3 - t_2 = -9{,}6$.
$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ donc (t_n) n'est pas arithmétique.

42 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 + 0{,}1n$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}55 - 10n$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1\,000$.
d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 21n$.

43 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5 - 0{,}3n$.
$a_0 = 5$; $a_1 = 4{,}7$; $a_2 = 4{,}4$ et $a_3 = 4{,}1$.
b. $b_0 = 3$; $b_1 = \frac{7}{3}$; $b_2 = \frac{5}{3}$ et $b_3 = 1$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 13 + 4{,}2n$.
13 ; 17,2 ; 21,4 et 25,6.
d. $d_0 = -\frac{2}{3}$; $d_1 = \frac{7}{3}$; $d_2 = \frac{16}{3}$ et $d_3 = \frac{25}{3}$.

44 **a.** (a_n) est de raison $r = -0{,}3 < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. (b_n) est de raison $r = -\frac{2}{3} < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. (c_n) est de raison $r = 4{,}2 > 0$, donc elle est strictement croissante.

d. (d_n) est de raison $r = 3 > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

45 **a.** (u_n) est de raison $r = -12 < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. (v_n) est de raison $r = 7{,}8 > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

46 **a.** $u_0 = -8$; $u_1 = 63 \times (-8) + 2 = -502$ et $u_2 = 63 \times (-502) + 2 = -31\,624$.
$\frac{u_1}{u_0} = 62{,}75$ et $\frac{u_2}{u_1} \simeq 62{,}996$.
$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

b. $v_0 = -2{,}4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{7}$.

c. $w_1 = 1$; $w_2 = \frac{1}{1} \times 1 = 1$ et $w_3 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.
$\frac{w_2}{w_1} = 1$ et $\frac{w_3}{w_2} = \frac{1}{2}$.
$\frac{w_2}{w_1} \neq \frac{w_3}{w_2}$ donc (w_n) n'est pas géométrique.

47 **a.** $u_n = 8{,}4(-2)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $u_0 \times q^n$, donc (u_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $u_0 = 8{,}4$.

b. $v_0 = 0$; $v_1 = 13$; $v_2 = 26$ et $v_3 = 39$.
$\frac{v_2}{v_1} = \frac{26}{13} = 2$ et $\frac{v_3}{v_2} = \frac{39}{26} = 1{,}5$.
$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2}$ donc (v_n) n'est pas géométrique.

c. $w_n = 12 \times 3{,}4^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $w_0 \times q^n$, donc (w_n) est géométrique de raison $q = 3{,}4$ et de premier terme $w_0 = 12$.

48 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 \times 0{,}1^n$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}55 \times (-10)^n$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1\,000$.

49 **a.** (u_n) est de premier terme $u_0 = -5 < 0$ et de raison $q = 0{,}1 \in \,]0 ; 1[$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. (v_n) est de raison $q = -10 < 0$, donc elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

c. (w_n) est de premier terme $w_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1$, donc elle est constante sur $\mathbb{N}$, égale à 1 000.

50 **a.** (u_n) est de raison $q = 2 > 1$ et $u_0 = 6 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. (v_n) est de raison $q = -0{,}25 < 0$, donc elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

51 **a.** $S = 1 + 2 + \ldots + 101$
$= \frac{1}{2} \times 101 \times 102 = 5\,151$

b. $T = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^8$
$= \frac{1 - 4^9}{1 - 4} = 87\,381$

c. $Z = 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^7$
$= \frac{1 - (-2)^8}{1 - (-2)} = -85$

52 **a.** (w_n) est arithmétique de raison $r = 2{,}4$;
donc $S = \frac{1}{2} \times 10 \times (w_0 + w_9)$,
soit $S = 5 \times (-3 - 3 + 2{,}4 \times 9) = 78$.

b. (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$;
donc $S = w_0 \times \frac{1 - 0{,}2^{10}}{1 - 0{,}2}$,
soit $S = \frac{5}{0{,}8} \times (1 - 0{,}2^{10}) = 6{,}249\,999\,36$.

Chapitre 3. Second degré

Les incontournables

37 **a.** $2{,}5(x + 3)^2 - 13{,}5 = 2{,}5x^2 + 15x + 9$
$= f(x)$

b.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Variations de f		↘	$-13{,}5$	↗	

38 **a.** $h(t) = -t^2 + 2t + 3$
$-(t - 1)^2 + 4 = -t^2 + 2t + 3 = h(t)$

b.

x	0		1		3
Variations de h	3	↗	4	↘	0

39 **a.** $2x^2 + 12x - 6 = 2(x + 3)^2 - 24$
b. $-3x^2 + 6x + 9 = -3(x - 1)^2 + 12$

40 **a.** $f_1(x) = (x + 7)^2 - 6$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
Variations de f_1		↘	-6	↗	

b. $f_2(x) = (x - 6)^2 + 20$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		6		∞
Variations de f_2		↘	20	↗	

c. $f_3(x) = -(x + 3)^2 + 8$
Le coefficient de x^2 est négatif.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Variations de f_3		↗	8	↘	

d. $f_4(x) = 4((x - 1)^2 - 1) = 4(x - 1)^2 - 4$.
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		1		∞
Variations de f_4		↘	-4	↗	

e. $f_5(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variations de f_5		↘	$\frac{14}{3}$	↗	

f. $f_6(x) = -5\left(x + \frac{1}{\text{[redacted]}}\right)^2 + 1$
Le coefficient de x^2 est négatif.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variations de f_6		↗	1	↘	

41 **a.** $a = 6$, $b = 7$ et $c = 2$. $\Delta = 1 > 0$ donc $x_1 = \frac{-7 - 1}{12} = \frac{-2}{3}$ et $x_2 = \frac{-7 + 1}{12} = \frac{-1}{2}$.

b. $a = -5$, $b = 10$ et $c = 1$. $\Delta = 120 > 0$ donc $x_1 = \frac{5 - \sqrt{30}}{5}$ et $x_2 = \frac{-10 + \sqrt{120}}{-10} = \frac{5 + \sqrt{30}}{5}$.

c. $4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

d. $a = -1$, $b = \sqrt{8}$ et $c = -19$. $\Delta = -68 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

42 **a.** On résout $-x^2 + 8x - 15 = 0$. $\Delta = 4 > 0$ donc $x_1 = \frac{-8 - 2}{-2} = 5$ et $x_2 = \frac{-8 + 2}{-2} = 3$.
$g(x) = 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2$
$g(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

b. $f(x) = -(x - 3)(x - 5)$ et $g(x) = (4x - 1)^2$.

43 **a.** On résout $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$\Delta = 81 > 0$ donc $x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4$ et

$x_2 = \frac{-7+9}{4} = 0{,}5$.

$f_1(x) = 2(x - 0{,}5)(x + 4) = (2x - 1)(x + 4)$

b. On résout $108x^2 - 36x + 3 = 0$.

$\Delta = 0$ donc $x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$.

$f_2(x) = 108\left(x - \frac{1}{6}\right)^2$

c. On résout $-3x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = 25 > 0$ donc $x_1 = \frac{-1-5}{-6} = 1$ et

$x_2 = \frac{-1+5}{-6} = -\frac{2}{3}$.

$f_3(x) = -3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = -(x-1)(3x+2)$

d. $f_4(x) = 49x^2 + 28x + 4 = (7x+2)^2$

$f_4(x) = 0 \Leftrightarrow (7x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{7}$.

$f_4(x) = (7x+2)^2$

44 **a.** $x_1 = 1$ est une racine évidente de f. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{7}{1} = 7$. Donc $x_1 \times x_2 = 7$, soit $x_2 = 7$.

Ainsi $f(x) = (x-1)(x-7)$.

b. $x_1 = 2$ est une racine évidente de g. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{-10}{10} = -1$.

Donc $x_1 \times x_2 = -1$ soit $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ainsi $g(x) = 10(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

c. $x_1 = 2$ est une racine évidente de h. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{-12}{-1} = 12$.

Donc $x_1 \times x_2 = 12$ soit $x_2 = 6$.

Ainsi $h(x) = -(x-2)(x-6)$.

d. $x_1 = 1$ est une racine évidente de k. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{23}{-5}$.

Donc $x_1 \times x_2 = -\frac{23}{5}$ soit $x_2 = -\frac{23}{5}$.

Ainsi $k(x) = -5(x-1)\left(x + \frac{23}{5}\right)$.

45 **a.**

x	$-\infty$		$-7-\sqrt{6}$		$-7+\sqrt{6}$		$+\infty$
Signe de $f_1(x)$		+	0	−	0	+	

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f_2(x)$		+	

c.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f_3(x)$		−	

d.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de $f_4(x)$		−	0	−	

46 **1. a.**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	0	−	

b.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$2{,}5$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	0	−	0	+	

2.a. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{1}{6}\right[\cup \left]4\,;+\infty\right[$

b. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{2}{7}\right] \cup [2{,}5\,;+\infty[$

c. $\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{6}\,;4\right[$

d. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{2}{7}\right[\cup \left]2{,}5\,;+\infty\right[$

47 **a.**

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-0{,}5$		$+\infty$
Signe de $6x^2 + 7x + 2$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[\cup \left]-0{,}5\,;+\infty\right[$

b. $x_1 = \frac{5-\sqrt{30}}{5}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{30}}{5}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $-5x^2 + 10x + 1$		−	0	+	0	−	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{5-\sqrt{30}}{5}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{30}}{5}\,;+\infty\right[$

c. $49x^2 + 28x + 4 = (7x+2)^2$. C'est un carré, donc toujours positif. Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

d.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-2x^2 + 4x - 4$		−	

Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

48 **a.** $7x^2 > 3x - 5 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x + 5 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $7x^2 - 3x + 5$		+	

Ainsi $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

b. $-x^2 + x > 1 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-x^2 + x - 1$		−	

Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

c. $2x \leqslant 5x^2 + 4 \Leftrightarrow 5x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $5x^2 - 2x + 4$		+	

Ainsi $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

d. $8x^2 - 10 \geqslant 7x^2 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 10$

$\Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{10}$ ou $x \geqslant \sqrt{10}$.

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty\,;-\sqrt{10}\,[\cup]\sqrt{10}\,;+\infty[$.

e. $\frac{4}{3}x^2 < \frac{2}{7}x + 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3 < 0$.

$\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3 = 0$

$x_1 = \frac{3-3\sqrt{197}}{28}$ et $x_2 = \frac{3+3\sqrt{197}}{28}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]\frac{3-3\sqrt{197}}{28}\,;\frac{3+3\sqrt{197}}{28}\right[$

f. $(2x-3)(6x+4) > x^2 - 6$

$\Leftrightarrow 11x^2 - 10x - 6 > 0$

$11x^2 - 10x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{5-\sqrt{91}}{11}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{91}}{11}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $11x^2 - 10x - 6$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{5-\sqrt{91}}{11}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{91}}{11}\,;+\infty\right[$

49 **1.** $f(x) = 0{,}75x^2 + 9x + 24$

2. $(0{,}75x + 6)(x + 4) = 0{,}75x^2 + 3x + 6x + 24$
$= f(x)$

3. a. $f(0) = 0{,}75 \times 0^2 + 9 \times 0 + 24 = 24$

b. $f(-4) = [0{,}75 \times (-4) + 6](-4 + 4) = 0$

c. $f(x) = -3 \Leftrightarrow 0{,}75(x+6)^2 - 3 = -3$
$\Leftrightarrow x = -6$

d. $f(x) < -3 \Leftrightarrow 0{,}75(x+6)^2 - 3 < -3$
$\Leftrightarrow 0{,}75(x+6)^2 < 0$
$\Leftrightarrow (x+6)^2 < 0$

Un carré est toujours positif donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

50 **1.** $g(t) = 3t^2 + 10t - 8$

2. $(3t-2)(t+4) = 3t^2 + 12t - 2t - 8 = g(t)$

3. a. $g(3) = 49$; $g(0) = -8$.

b. $g(t) = -8 \Leftrightarrow 3t^2 + 10t - 8 = -8$
$\Leftrightarrow 3t^2 + 10t = 0 \Leftrightarrow t(3t + 10) = 0$
$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -\frac{10}{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{0\,;-\frac{10}{3}\right\}$

c. $g(t) = 0 \Leftrightarrow (3t-2)(t+4) = 0$
$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ ou $t = -4$.

t	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $3t^2 + 10t - 8$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;-4[\cup \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

Les incontournables

31 **a.** $t(h) = \dfrac{-2(2+h)+3-(-2\times 2+3)}{h} = -2$.

$\lim\limits_{\to 0} t(h) = -2$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -2$.

b. $t(h) = \dfrac{2(-1+h)-5-(2\times(-1)-5)}{h} = 2$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 2$ donc g est dérivable en -1 et $g'(-1) = 2$.

c. $t(h) = \dfrac{2(2+h)^2-3-(2\times 2^2-3)}{h} = 8+2h$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 8$ donc k est dérivable en 2 et $k'(2) = 8$.

d. $t(h) = 13 + 2h$. $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 13$ donc l est dérivable en 2 et $l'(2) = 13$.

32 **a.** $t(h) = \dfrac{\sqrt{5+h-5}-\sqrt{5-5}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 5.

b. $t(h) = 2 + 3h$. $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 2$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 2$.

c. $t(h) = \dfrac{\sqrt{4(2+h)-2}-\sqrt{4\times 2-2}}{h}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{6+h}-\sqrt{6}}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ donc k est dérivable en 2 et $k'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

d. $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{h-1}-\dfrac{1}{0-1}}{h} = \dfrac{1}{h-1}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -1$ donc l est dérivable en 0 et $l'(0) = -1$.

33 **a.** La tangente à $\mathscr{P}$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-1) = 0$.

b. On étudie la dérivabilité de f en $a = -2$:

$t(h) = 2h - 4$; $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -4$ donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -4$.

Ainsi $\mathscr{P}$ admet une tangente au point d'abscisse -2, qui a pour équation :

$$y = f(-2) + (-4)(x-(-2)),$$

soit $y = -4x - 11$.

34 **a.** $t(h) = \dfrac{(2+h)^2+3(2+h)-1-(2^2+3\times 2-1)}{h}$

$= h + 7$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 7$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = f(2) + f'(2)\times(x-2)$, soit $y = 7x - 5$.

b. $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{3+h}-\dfrac{1}{3}}{h} = -\dfrac{1}{9+3h}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -\dfrac{1}{9}$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = -\dfrac{1}{9}$. La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation : $y = f(3) + f'(3)\times(x-3)$, soit $y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{2}{3}$.

35 **a.** $\mathscr{T}$ a pour équation $y = -2x + 2$ donc $f'(1) = -2$.

b. $f'(a) = 0$ pour $a = 0$ et $a = 2$.

36 **a.** f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -18x^2$.

b. g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -8x$.

c. h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -6x + 2$.

d. k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = -6x^2 + 14x - \dfrac{1}{3}$.

e. l dérivable sur $\mathbb{R}$ et $l'(x) = \dfrac{10x-2}{3}$.

37 **a.** f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{6x}{5}$.

b. g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -10x + 7{,}2$.

c. h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 16x + \dfrac{5}{7}$.

d. $k(x) = 9x^2 - 42x + 49$.

k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = 18x - 42$.

e. $l(x) = 5^2 - (3x)^2 = 25 - 9x^2$.

l dérivable sur $\mathbb{R}$ et $l'(x) = -18x$.

38 **a.** $f = u \times v$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x^2 - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3$, $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = 3(x^2-1) + 2x \times 3x = 9x^2 - 3$.

b. $g = u \times v$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 3x - 5$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2$, $v'(x) = 3$.

$g'(x) = -2(3x-5) + 3(-2x+3) = -12x + 19$.

c. $h = u \times v$ avec $u(x) = -5x^2 + 1$ et $v(x) = 2x^2 + 3x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -10x$, $v'(x) = 4x + 3$.

$h'(x) = -40x^3 - 45x^2 + 4x + 3$.

d. $k = u \times v$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 3x - 5$. k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $v'(x) = 3$.

$k'(x) = -\dfrac{1}{x^2}(3x-5) + 3 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{x^2}$.

39 **a.** $f = u \times v$ avec $u(x) = 5\sqrt{x}$ et $v(x) = 3x + 1$.

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $u'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 3$.

$f'(x) = \dfrac{45}{2}\sqrt{x} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

b. $g = u \times v$ avec $u(x) = 10x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $u'(x) = 10$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$g'(x) = 10\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times 10x = 15\sqrt{x}$.

c. $h = u \times v$ avec $u(x) = 3\sqrt{x} - 1$ et $v(x) = 2x + 1$. h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$u'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 2$.

$h'(x) = 12\sqrt{x} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 3$.

d. $k = u^2$ avec $u(x) = 5x + 1$. k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 5$.

$k'(x) = 2 \times 5(5x+1) = 10(5x+1)$.

40 **a.** $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = -2x + 4$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $v'(x) = -2$.

Donc $f'(x) = -\dfrac{-2}{(-2x+4)^2} = \dfrac{2}{(-2x+4)^2}$.

b. $g = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = 2x + 6$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.

$g'(x) = \dfrac{3(2x+6)-2(3x-1)}{(2x+6)^2} = \dfrac{20}{(2x+6)^2}$.

c. $h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x^2 + 1$.

$v(x) = 0$ n'a pas de solution donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$. $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$.

$h'(x) = \dfrac{3(x^2+1)-2x(3x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

d. $k = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 6$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6$ donc k est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-6\}$. $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$.

$k'(x) = \dfrac{3x^2(x+6)-x^3}{(x+6)^2} = \dfrac{2x^3+18x^2}{(x+6)^2}$.

41 **a.** $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2$. $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2)^2} = -\dfrac{2}{x^3}$.

b. $g = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = -3x + 1$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\text{[redacted]}}\right\}$. $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -3$.

$g'(x) = \dfrac{2(-3x+1)-(-3)(2x)}{(-3x+1)^2} = \dfrac{2}{(-3x+1)^2}$.

c. $h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -2x + 1$ et $v(x) = x^2 + 5x - 1$.

L'équation $v(x) = 0$ admet deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$.

Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{x_1\,;x_2\}$. $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 2x + 5$.

$h'(x) = \dfrac{2x^2-2x-3}{(x^2+1)^2}$.

d. $k = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. $u'(x) = 0$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$k'(x) = \dfrac{0\times\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times 3}{(\sqrt{x})^2} = -\dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$.

Chapitre 5. Dérivation : applications

Les incontournables

23 **a.**

x	-4		-2		2		4
Variations de f		↗		↘		↗	

b.

x	-4		-2		2		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

24

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

25 **a.**

x	-1		0		3		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b.

x	-1		0		3		4
Variations de f	$-\frac{11}{6}$	↗	0	↘	$-4{,}5$	↗	$-\frac{8}{3}$

26 **a.** $f'(x) = -8x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	$-10{,}94$	↘	

b. $g'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4)$

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(-3x + 4)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g		↘	-7	↗	-4	↘	

c. $h'(x) = -18x^2 + 22x - 3$

$\Delta = 268$; $x_1 = \dfrac{11 - \sqrt{67}}{18}$ et $x_2 = \dfrac{11 + \sqrt{67}}{18}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h		↘	$h(x_1)$	↗	$h(x_2)$	↘	

d. $k'(x) = -12x + 30$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $k'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de k		↗	$62{,}5$	↘	

e. $l'(x) = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de $l'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de l		↗	38	↘	2	↗	

27 **a.** $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x + 1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘	$-0{,}5$	↗	$0{,}5$	↘	

b. $g'(x) = \dfrac{7}{x^2}$

x	0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$+$	
Variations de g	||	↗	

c. $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

x	0		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	||	$+$	
Variations de h		↗	

d. $k'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $k'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de k		↗	-2	↘	||	↘	2	↗	

28 **a.** Oui : maximum en $x = 2$ car la dérivée, positive puis négative, s'annule en $x = 2$ en changeant de signe.

b. Non car la dérivée est toujours positive sur I.

c. Oui : maximum en $x = 0$ car la dérivée, positive puis négative, s'annule en $x = 0$ en changeant de signe.

d. Oui : minimum en $x = -2$ car la dérivée, négative puis positive, s'annule en $x = -2$ en changeant de signe.

29 $B'(x) = -2x + 10$

x	0		5		10
Signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B		↗	16	↘	

Nombre de clés USB à produire mensuellement pour obtenir un bénéfice maximal : 5 000.
Bénéfice mensuel maximal : 16 000 €.

30 On pose ME $= x$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme ENZO.
$\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 6x + 8$ et $\mathscr{A}'(x) = 4x - 6$.

x	0		$\frac{3}{2}$		4
Signe de $\mathscr{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de $\mathscr{A}$		↘	$3{,}5$	↗	

Il existe une position du point E pour laquelle $\mathscr{A}$ est minimale : ME $= 1{,}5$.

Chapitre 6. Fonction exponentielle

Les incontournables

a. $f'(x) = (3 + 3x)e^x$

b. $g'(x) = \dfrac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}$

c. $h'(x) = e^x\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

d. $k'(x) = (3x^2 + x + 3)e^x$

38 **1.** c **2.** b **3.** d **4.** a

39 **a.** e^{9x} **b.** $e^{x+2} + 1$
c. $e^{3x} - e^{2x}$ **d.** $1 - e^{x+10}$

40 **a.** $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ **b.** $\mathcal{S} = \varnothing$

c. $\mathcal{S} = \{-3\ ;\ 3\}$

d. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{7}{4}\right\}$ **e.** $\mathcal{S} = \{-1\ ;\ 3\}$

f. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

41 **a.** $\mathcal{S} =]0\ ;\ +\infty[$ **b.** $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 3]$
c. $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -2[$ **d.** $\mathcal{S} = [2\ ;\ +\infty[$
e. $\mathcal{S} =]-3\ ;\ 2[$ **f.** $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$

42 **a.** $f'(x) = -5e^{-5x+3}$.
f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. $g'(x) = \dfrac{(6x-13)e^{2x+1}}{(3x-5)^2}$.

g est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{3}\right[$ et sur $\left]\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{13}{6}\right]$,

et croissante sur $\left[\dfrac{13}{6}\ ;\ +\infty\right[$.

c. $h'(x) = (-6x + 13)e^{3x}$.

h est croissante sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{13}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{13}{6}\ ;\ +\infty\right[$.

d. $k'(x) = \dfrac{(-x^2 - x + 3)e^{-x+2}}{(x^2 - x - 2)^2}$

k est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{-\sqrt{13}-1}{2}\right]$,

croissante sur $\left[\dfrac{-\sqrt{13}-1}{2}\ ;\ -1\right[$,

croissante sur $\left]-1\ ;\ \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$,

décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\ ;\ 2\right[$

et décroissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

43 $f : \mathscr{C}_4$ (orange) ; $g : \mathscr{C}_2$ (rouge) ;
$h : \mathscr{C}_1$ (verte) ; $k : \mathscr{C}_3$ (bleue).

44 **a.** … décroissante … $(0\ ;\ 1)$ et $(1\ ;\ e^{-5})$.

b. … croissante … $\left(0\ ;\ \dfrac{3}{e^4}\right)$ et $(1\ ;\ 3e)$.

et

c. … décroissante … $\left(0\ ;\ -\dfrac{3}{e}\right)$ et $(1\ ;\ -3e)$.

45 **a.** croissance exponentielle
b. décroissance exponentielle
c. croissance exponentielle
d. décroissance exponentielle

46 **a.** $3e^{0,69t}$ **b.** $0,2e^{1,1t}$
c. $(-4)e^{0,26t}$ **d.** $5e^{-0,22t}$

Chapitre 7. Fonctions trigonométriques

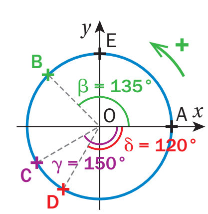
Les incontournables

35 **1. a.** $L \approx 2,4$ cm **b.** $L \approx 6,3$ cm
2. a. $L \approx 1$ cm **b.** $L \approx 4,7$ cm

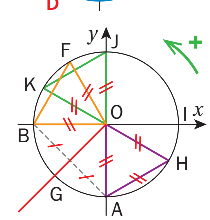
36 **a.** $M\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ **b.** $N\left(\dfrac{10\pi}{9}\right)$ **c.** $P\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

37

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 2\pi - \frac{5\pi}{6}$$



38 OKJ, OFB et OHA sont des triangles équilatéraux. [OG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OBA}$.



39 **a.** $-\frac{13\pi}{3} = -4\pi - \frac{\pi}{3}$.

Donc le point M est associé au réel $-\frac{\pi}{3}$.

b. Sur $[0\ ;\ 2\pi]$, M est associé au réel $\frac{5\pi}{3}$.

40 **a.** Oui, car $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$.

b. Non, car $\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$.

c. Oui, car $\frac{19\pi}{10} = \frac{20\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = 2\pi - \frac{\pi}{10}$.

d. Non, car $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 4\pi - \frac{5\pi}{6}$

et $-\frac{5\pi}{6} \neq -\frac{7\pi}{6}$.

e. Non, car $\frac{18\pi}{5} = \frac{20\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}$

et $-\frac{2\pi}{5} \neq -\frac{6\pi}{5}$.

f. Non, car $\frac{25\pi}{2} = \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 12\pi + \frac{\pi}{2}$

et $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$.

41 **a.** $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos(-\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = 0$.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

42 **a.** $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}59$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}81$.

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}95$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}97$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}26$.

$\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) \approx 0{,}9$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) \approx -0{,}43$.

b. $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 0{,}17$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 0{,}98$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \approx 0{,}14$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \approx 0{,}99$.

$\cos\left(\frac{13\pi}{7}\right) \approx 0{,}9$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right) \approx -0{,}43$.

$\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \approx -0{,}95$.

43 **a.** … l'axe des ordonnées.

b. … l'origine du repère.

44 **a.** Vrai, car elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Faux, car elle est croissante sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\pi\right]$.

c. Vrai : ce minimum unique sur $[0\ ;\ 2\pi]$ est égal à -1 en $x = \pi$.

d. Faux, car elle est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$.

e. Faux, car sur $[0\ ;\ 3\pi]$, il existe deux maxima égaux à 1 en $x = \frac{\pi}{2}$ et en $x = \frac{5\pi}{2}$.

f. Vrai.

Chapitre 8. Produit scalaire

Les incontournables

34 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \cos(30) = 10\sqrt{3}$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 5$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times DC = 4 \times 5 = 20$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 6 \times \cos(60) = 12$.

e. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 3^2) = 1$.

35 **a.** $-2\vec{u}\cdot(3\vec{u} + \vec{v}) = -6\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$
$= -6 \times 5^2 - 2 \times 8 = -166$

b. $(2\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v})$
$= -8\vec{u}^2 + 14\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{v}^2 = -115$

c. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2} = \sqrt{50}$

d. $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2} = \sqrt{18}$

36 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 \times (-1) + 2 \times 0 = 1$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

37 **a.** $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$.

b. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$, donc

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -6 \times (-3) + 2 \times (-9) = 0$.

c. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

38 Avec le théorème de Pythagore dans ABD, $BD^2 = 3^2 + 4{,}5^2 = 29{,}25$.

On note C' le projeté orthogonal de C sur (AB), C'B = 2,5 et avec le théorème de Pythagore dans C'BC, $BC^2 = 3^2 + 2{,}5^2 = 15{,}25$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$
$= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$
$= -(BA^2 + BD^2 - AD^2) + (BC^2 + BD^2 - CD^2)$
$= -(20{,}25 + 29{,}25 - 9) + (15{,}25 + 29{,}25 - 4)$
$= 0$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux, donc les diagonales sont bien perpendiculaires.

39 **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4 \times (-6) + 4 \times (-2) = 16$.

b. $AB = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ et $AC = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{16}{\sqrt{32}\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

c. $\widehat{BAC} \approx 63°$.

40 **a.** $x = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos(45)$
$= 41 - 20\sqrt{2}$

b. $x = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(30)$
$= 13 - 6\sqrt{3}$

c. $x = 4^2 + 5{,}5^2 - 2 \times 4 \times 5{,}5 \times \cos(60)$
$= 24{,}25$

41 **a.** $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{C})$,

donc $\cos(\widehat{C}) = \frac{3^2 - 4{,}3^2 - 6{,}7^2}{-2 \times 4{,}3 \times 6{,}7}$, $\widehat{C} \approx 19{,}3°$.

On trouve de même $\widehat{B} \approx 28{,}3°$ et donc $\widehat{A} = 180 - \widehat{B} - \widehat{C} \approx 132{,}4°$.

b. $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 - \frac{BC^2}{2}$, d'où $AI^2 = 2{,}5225$

et donc $AI = \sqrt{2{,}5225}$.

42 **1. a.** On cherche P appartenant à la demi-droite [AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = 20$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = AB \times AP = 20$ et donc $AP = \frac{10}{3}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 20 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par P.

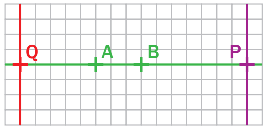
b. On cherche Q appartenant à la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} = -10$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} = -AB \times AQ = -10$

et donc $AQ = \frac{5}{3}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -10 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AQ}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QM} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par Q.

2.



43 **a.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(60)$
$= 49$, donc $BC = 7$.

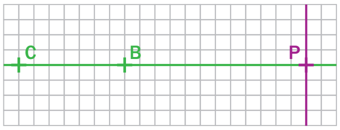
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60) = 20$.

b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$
$= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 = -84$

c. On cherche P appartenant à la droite (BC) tel que $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC} = -84$, et donc $-BP \times BC = -84$ et donc $BP = 12$.

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} = -84 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BP}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (BC) et passant par P.



Chapitre 9. Géométrie repérée

Les incontournables

36 **a.** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0+2\\1-4\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d). $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

d. $y = \frac{5}{4}x + 2 \Leftrightarrow 5x - 4y + 8 = 0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

37 $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $3x - 4y + 1 = 0$, c'est donc un vecteur normal à la droite (d) cherchée.
Une équation de (d) est : $4x + 3y + c = 0$ avec c un nombre réel. $K \in (d)$ donc :
$4 \times 2 + 3 \times (-5) + c = 0 \Leftrightarrow c = 7$.
Une équation de (d) est $4x + 3y + 7 = 0$.

38 **1. a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice (m) de [AB] donc une équation de (m) est $3x - 2y + c = 0$.
Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, donc
$\frac{3}{2} - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$.
Une équation de (m) est :
$$3x - 2y + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6x - 4y + 5 = 0.$$

b. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice (m') de [AC] donc une équation de (m') est $-x - y + e = 0$.
Le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{-3}{2}; \frac{5}{2}\right)$,
donc $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} + e = 0 \Leftrightarrow e = 1$.
Une équation de (m') est $-x - y + 1 = 0$.

2. Les coordonnées du centre du cercle circonscrit vérifient le système :
$$\begin{cases} 6x - 4y + 5 = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{10} \\ x = \frac{-1}{10} \end{cases}.$$
Le centre du cercle circonscrit à ABC a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{10}; \frac{11}{10}\right)$.

39 Une équation de la droite perpendiculaire à (d) passant par A est $-3x + y + c = 0$ avec c un nombre réel.
$-3 \times 1 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.
Donc les coordonnées du projeté orthogonal vérifient le système :
$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ -3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2{,}2 \\ x = 0{,}4 \end{cases}.$$
Le projeté a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

40 **a.** La droite (DE) admet $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ou $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Une équation de (DE) est $x + y + c = 0$.
D est sur cette droite, donc :
$-1 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$.
(DE) : $x + y - 3 = 0$
La droite perpendiculaire à (DE) passant par F admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation de cette droite est $-x + y + e = 0$ avec e un nombre réel.
$-(-2) + 1 + e = 0 \Leftrightarrow e = -3$
Son équation est donc $-x + y - 3 = 0$.
Les coordonnées de H vérifient le système :
$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$
Donc H(0 ; 3).

b. $FH^2 = 4 + 4 = 8$ donc $FH = 2\sqrt{2}$.

c. $DE^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ donc $DE = 3\sqrt{2}$.

$\mathcal{A}_{DEF} = \frac{DE \times FH}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 6$.

41 **a.** $(x-1)^2 + (y+7)^2 = 25$

b. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$

c. $(x-3)(x+8) + (y-5)(y-6) = 0$

42 **a.** $DE^2 = 15^2 + 9^2 = 306$;
$EF^2 = 3^2 + 5^2 = 34$; $FD^2 = 12^2 + 14^2 = 340$.
$DE^2 + EF^2 = FD^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, EFD est rectangle en E.

b. Le cercle circonscrit à DEF a pour diamètre [FD].
Une équation de ce cercle est :
$(x-6)(x+6) + (y+6)(y-8) = 0$.

43 Une équation de la médiatrice de [GH] est $x = 1$. Une équation de la médiatrice de [GI] est $x - y + 1 = 0$.
Les coordonnées du centre C du cercle circonscrit vérifient :
$$\begin{cases} x = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$
Donc C(1 ; 2).
Le rayon du cercle est CI avec $CI^2 = 1^2 + 4^2 = 17$.
Une équation du cercle est donc :
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17.$$

44 **a.** Cercle de centre O(5 ; –2) et de rayon 4.

b. Cercle de centre O(–3 ; 1) et de rayon 1.

c. Cercle de centre O(1 ; 0) et de rayon 5.

d. Cercle de centre O(0 ; –2) et de rayon $\sqrt{3}$.

e. Cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

f. $4x^2 + 4(y-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{4}$.

Cercle de centre O(0 ; 2) et de rayon $\frac{3}{2}$.

45 **a.** $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$
Cercle de centre O(–2 ; 3) et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b. $x^2 + 5x + y^2 - 10y = -8$
$\Leftrightarrow (x+2{,}5)^2 + (y-5)^2 = 23{,}25$
Cercle de centre O(–2,5 ; 5) et de rayon $\sqrt{23{,}25}$.

c. $x^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.
Ce n'est pas un cercle.

d. $x^2 - x + y^2 + 2y + 3 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = -\frac{7}{4} < 0$
Ce n'est pas un cercle.

e. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$
Cercle de centre O(–4 ; –3) et de rayon 5.

f. $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$
Ce n'est pas un cercle : c'est le point de coordonnées (–1 ; 2).

46 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 - m^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + 6 - m^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m^2 - 4$
Cette équation est celle d'un cercle
$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+2) > 0$
$\Leftrightarrow m\ ]-\infty\ ; -2[\ \cup\ ]2\ ; +\infty[$

47 **a.** $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

b. Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (–5 ; –1).

c. La parabole passe par les points A(2 ; 0) et B(–4 ; 0) donc l'abscisse de son sommet est égal à $\frac{2 + (-4)}{2} = -1$ et $(-1-2)(-1+4) = -9$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (–1 ; –9).

d. $y = -2x(x-1) - 7 = -2x^2 + 2x - 7$
$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ et $-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} - 7 = \frac{-13}{2}$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{-13}{2}\right)$.

48 **a.** $\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 0.5} = -3$. Oui, la droite d'équation $x = -3$ est axe de symétrie de la parabole.

b. Le sommet a pour coordonnées (3 ; 4). Non : c'est la droite d'équation $x = 3$ qui est l'axe de symétrie.

c. $y = x^2 - 2x - 6$ donc $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.
Non : c'est la droite d'équation $x = 1$ qui est l'axe de symétrie.

d. Le sommet a pour coordonnées (–1 ; –3). Non : c'est la droite d'équation $x = -1$ qui est l'axe de symétrie.

= 1 – P(« aucun client n'a obtenu un bon de réduction »)

1 4 5

Chapitre 10. Probabilités conditionnelles

Les incontournables

29 **1. a.** P(A ∩ B) = 0,25 + 0,35 – 0,4 = 0,2

b.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,2	0,15	0,35
$\overline{B}$	0,05	0,6	0,65
Total	0,25	0,75	1

2. a. $P_A(B) = \dfrac{0,2}{0,25} = 0,8$; $P_B(A) = \dfrac{0,2}{0,35} = \dfrac{4}{7}$;
$P_A(\overline{B}) = \dfrac{0,05}{0,25} = 0,2$; $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{0,05}{0,65} = \dfrac{1}{13}$.

b. La probabilité de B sachant que A est réalisé vaut 0,8 ; la probabilité de A sachant que B est réalisé vaut $\dfrac{4}{7}$; la probabilité de $\overline{B}$ sachant que A est réalisé vaut 0,2 et la probabilité de A sachant que $\overline{B}$ est réalisé vaut $\dfrac{1}{13}$.

30 **1.**

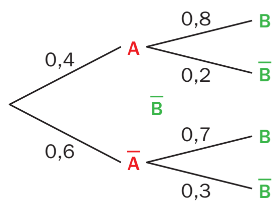
	Maths	SVT	Total
Manuel scolaire	35	30	65
Annales	15	10	25
Total	50	40	90

2. a. P(« manuel scolaire de maths ») $= \dfrac{35}{90} = \dfrac{7}{18}$.

b. $P_{\text{« manuel scolaire »}}(\text{« Maths »}) = \dfrac{35}{65} = \dfrac{7}{13}$.

c. $P_{\text{« SVT »}}(\text{« Annales »}) = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$.

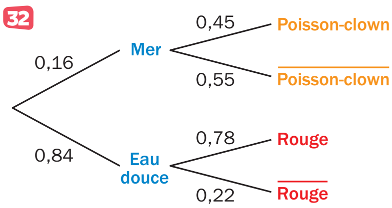
31 **a.**



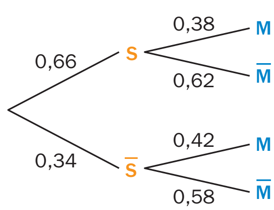
b. $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,3$.

c. $P(\overline{A} \cap B) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$ et
$P(A \cap \overline{B}) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.

32



33 **a.**



b. P(S ∩ M) = 0,38 × 0,66 = 0,2508 et
$P(\overline{S} \cap M) = 0,42 \times 0,34 = 0,1428$.

c. S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers ; on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$P(M) = P(M \cap S) + P(M \cap \overline{S})$
$= 0,2508 + 0,1428 = 0,3936$.

$P_M(S) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(M)} = \dfrac{0,2508}{0,3936}$
$= \dfrac{209}{328} \approx 0,637$.

d. P(M) est la probabilité que la guirlande choisie ait l'option minuteur ; $P_M(S)$ est la probabilité que la guirlande choisie fonctionne sur secteur sachant qu'elle possède l'option minuteur.

34 **a.** P(A) × P(B) = 0,21 × 0,79
= 0,1659 ≠ 0,17 = P(A ∩ B)
donc A et B ne sont pas indépendants.

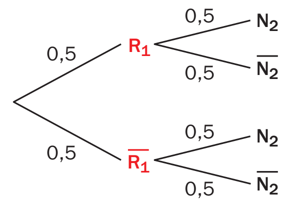
b. P(A) × P(B) = 0,2 × 0,8 = 0,16.
P(A ∩ B) = P(A) + P(B) – P(A ∪ B)
= 0,2 + 0,8 – 0,84 = 0,16 = P(A) × P(B)
donc A et B sont indépendants.

c. $P_A(B) = 0,1539 \neq P(B) = 0,81$
donc A et B ne sont pas indépendants.

35 A et B sont indépendants donc :
$P(B) = P_A(B) = 0,48$ et $P_B(A) = P(A) = 0,18$.
P(A ∩ B) = 0,18 × 0,48 = 0,0864.
P(A ∪ B) = 0,18 + 0,48 – 0,0864 = 0,5736.

36 **1. a.** Comme on remet la carte dans le jeu entre les deux épreuves, celles-ci sont indépendantes.

b.



2. a. P(« deux cartes noires »)
$= P(\overline{R_1} \cap N_2) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

b. P(« au plus une carte rouge »)
= 1 – P(« deux cartes rouges »)
= 1 – 0,25 = 0,75.

Chapitre 11. Variables aléatoires

Les incontournables

25 **a.** 0,20 + 2p + 3p + 0,09 + 0,16 + 0,30
= 1, donc 5p = 0,25, soit p = 0,05.

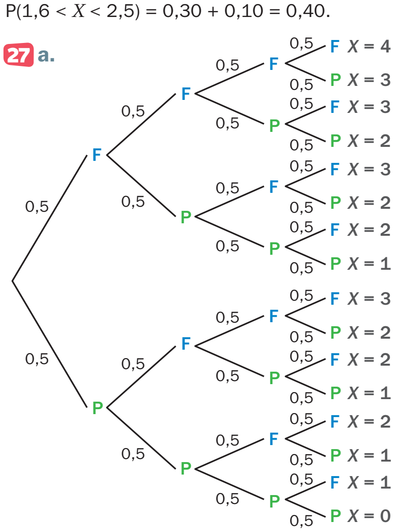
b. $P(X \geqslant 3) = 0,16 + 0,30 = 0,46$.
$P(X < 1) = 0,20 + 0,10 = 0,30$.
$P(1 < X < 4) = 0,09 + 0,16 = 0,25$.

26 **a.**

x_i	0,8	1,2	1,8	2,2	2,8
$P(X = x_i)$	0,15	0,25	0,30	0,10	0,20

b. $P(X < 2) = 0,15 + 0,25 + 0,30 = 0,70$.
$P(X > 2,8) = 0$.
$P(1,6 < X < 2,5) = 0,30 + 0,10 = 0,40$.

27 **a.**



x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

b. $P(X < 2) = 0,0625 + 0,25 = 0,3125$.

c. $P(X \geqslant 3) = 0,25 + 0,0625 = 0,3125$.

d. $P(X \leqslant 1) = 0,0625 + 0,25 = 0,3125$.

28 **a.**

```python
import random
def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.16:
        return -5
    if alea<0.43:
        return 0
    if alea>=0.77:
        return 10
    else:
        return 15
```

b.

```python
import random
import math

def moy(n):
    mu=0
    for simu in range(n):
        mu=mu+simu_X()
        return mu/n
```

c.

```python
def e_type(n):
    mu=moy(n)
    s=0
    for simu in range(n):
        s=s+(simu_X()-mu)**2
    return math.sqrt(s/n)
```

29 **1.** E(X) = 4,08 et $\sigma(X) \approx 1{,}72$.

2. a.

y_j	5	6	7	8	9	10
P($Y = y_j$)	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

E(Y) = E(X) + 4 = 8,08.
$\sigma(Y) = \sigma(X) \approx 1{,}72$.

b.

z_j	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8
P($Z = z_j$)	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

E(Z) = 2,3 × E(X) = 9,384.
$\sigma(Z) = 2{,}3 \times \sigma(X) \approx 3{,}956$.

c.

t_j	0	-1	-2	-3	-4	-5
P($T = t_j$)	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

E(T) = –E(X) + 1 = –3,08.
$\sigma(T) = |-1|\sigma(X) \approx 1{,}72$.

30 **a.**

x_i	0	5	50	100
P($X = x_i$)	$\frac{283}{300}$	$\frac{1}{30}$	0,02	$\frac{1}{300}$

y_i	0	5	25	50
P($Y = y_i$)	$\frac{127}{150}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{75}$

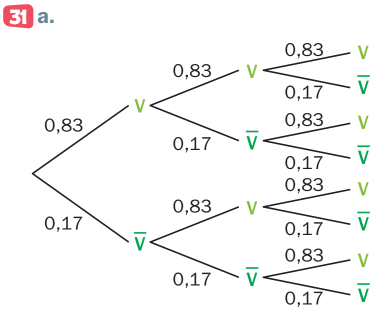
b. E(X) = 1,5 et E(Y) = 1,5.

c. V(X) = $\frac{983}{12}$ et $\sigma(X) \approx 9{,}05$.

V(Y) = $\frac{463}{12}$ et $\sigma(Y) \approx 6{,}21$.

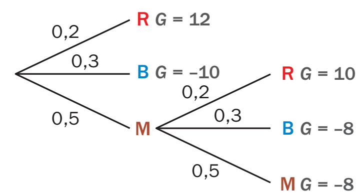
d. Les tombolas ont des gains moyens identiques (espérances égales), mais les gains sont plus dispersés pour la tombola de Noël (qui a un écart type de gain plus élevé).

31 **a.**



b. P(X = 0) = $0{,}17^3$.
P(X = 1) = 3 × 0,83 × $0{,}17^2$.
P(X = 2) = 3 × $0{,}83^2$ × 0,17.
P(X = 3) = $0{,}83^3$.

32 **a.**



Les valeurs prises par G sont :
{–8 ; –10 ; 10 ; 12}.

b. P(G = –10) = 0,3.
P(G = –8) = 0,5 × 0,3 + 0,5 × 0,5 = 0,4.
P(G = 10) = 0,5 × 0,2 = 0,1.
P(G = 12) = 0,2.

Corrigé du livret de liaison 1ère $\longrightarrow$ Tle - Mathématiques

Exercice 1 **Savoir résoudre une équation du second degré ou s'y ramenant**

1. Niveau 1

a) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 1 = 0$ est une équation de degré 2 (car forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 8, b = -2, c = -1$) de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 8 \times (-1) = 36$

$\Delta > 0$, donc **l'équation admet deux solutions réelles distinctes :**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{36}}{2 \times 8} = -\mathbf{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{36}}{2 \times 8} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \boxed{\mathbf{S} = \left\{-\mathbf{\frac{1}{4}}\,;\,\mathbf{\frac{1}{2}}\right\}}$$

b) $5x^2 + x + 4 = 0$ est une équation de degré 2 de $\Delta = 1^2 - 4 \times 5 \times 4 = -79$

$\Delta < 0$, donc **l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.** $\boxed{\mathbf{S} = \emptyset}$

c) $3x^2 - 4x - 1 = 2x - 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$ est une équation de degré 2 de $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$

$\Delta = 0$, donc **l'équation admet une solution (double) réelle :** $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \mathbf{1}$ $\boxed{\mathbf{S} = \{\mathbf{1}\}}$

Remarque On pouvait aussi remarquer que le calcul de Δ n'était pas nécessaire ici :

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

2. Niveau 2

a) $\frac{-x^2 + 2x + 8}{2x + 4} = 0$ ***équation « quotient nul » :*** $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$ <u>et</u> $\mathrm{B} \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $-x^2 + 2x + 8 = 0$ <u>et</u> $2x + 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 4$ <u>ou</u> $x = -2$ <u>et</u> $x \neq -2$

> $-x^2 + 2x + 8 = 0$ est une équation de degré 2
> de $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$
> $\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
> $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \times (-1)} = 4$ et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \times (-1)} = -2$

Finalement, **l'équation $\frac{-x^2 + 2x + 8}{2x + 4} = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: 4.**

b) Pour tout réel x, $(x^2 - 5)(3x^2 + x - 1) = 3x^4 + x^3 - x^2 - 15x^2 - 5x + 5 = 3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5$.

Par suite, $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 - 5)(3x^2 + x - 1) = 0$ ***équation « produit nul » :*** $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$ <u>ou</u> $\mathrm{B} = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5 = 0$ <u>ou</u> $3x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = -\sqrt{5}$ <u>ou</u> $x = \sqrt{5}$ <u>ou</u> $x = x_1$ <u>ou</u> $x = x_2$

> $3x^2 + x - 1 = 0$ est une équation de degré 2
> de $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 13$
> $\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
> $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

Finalement, **l'équation $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$ a pour ensemble solution :**

$$\mathbf{S} = \left\{-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\,;\,\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}\,;\,\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right\}$$

Exercice 2 **Résoudre un problème de degré 2**

Soit n un entier quelconque. $n-1$, n et $n+1$ sont alors trois entiers consécutifs.
Savoir que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1 877 équivaut à :

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=1\,877 \quad \text{soit} \quad n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1 = 1\,877$$
$$\Leftrightarrow \quad 3n^2=1\,875$$
$$\Leftrightarrow \quad n^2=625$$
$$\Leftrightarrow \quad n=-25 \quad \text{ou} \quad n=25$$

Les trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 1 877 sont : -26 , -25 , -24 ou 24 , 25 , 26.

Remarque En considérant les entiers consécutifs $n, n+1$ et $n+2$, on obtient l'équation :

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=1\,877 \quad \Leftrightarrow n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4=1\,877$$
$$\Leftrightarrow 3n^2+6n-1\,872=0$$

Cette dernière équation est de degré 2, son discriminant $\Delta=6^2-4\times 3\times(-1\,872)=22\,500$
$\Delta>0$, donc **l'équation admet deux solutions réelles distinctes :**

$$n_1=\frac{-6-\sqrt{22\,500}}{2\times 3}=\mathbf{-26} \qquad \text{et} \qquad n_2=\frac{-6+\sqrt{22\,500}}{2\times 3}=\mathbf{24}$$

On retrouve les deux triplets -26 , -25 , -24 ou 24 , 25 , 26.

Exercice 3 **Savoir déterminer le signe d'un polynôme de degré 2**

1. $f(x)=x^2-7x+10$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta=(-7)^2-4\times 1\times 10=9$

$\Delta>0$, donc $f(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1=\dfrac{7-\sqrt{9}}{2\times 1}=2$ et $x_2=\dfrac{7+\sqrt{9}}{2\times 1}=5$.

$f(x)$ est donc du signe de 1 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines 2 et 5.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

2. $f(x)=-6x^2+x-1$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta=1^2-4\times(-6)\times(-1)=-23$

$\Delta<0$, donc $f(x)$ n'admet pas de racine réelle.

$f(x)$ est donc du signe de -6 (coefficient de x^2), autrement dit, **$f(x)$ est strictement négatif sur** $\mathbb{R}$

Exercice 4 **Savoir étudier la position relative de deux courbes**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+4x+3$ et $g(x)=x+4$.

$f(x)-g(x)=-2x^2+4x+3-(x+4)=-2x^2+3x-1$

$-2x^2+3x-1$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta=3^2-4\times(-2)\times(-1)=1$

$\Delta>0$, donc $f(x)-g(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{1}}{2\times(-2)}=1$ et $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{1}}{2\times(-2)}=0{,}5$.

$f(x)-g(x)$ est donc du signe de -2 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines 0,5 et 1.

x	$-\infty$		0,5		1		$+\infty$
signe de $f(x)-g(x)$		−	0	+	0	−	

CONCLUSION

- **Sur** $]-\infty\,;\ \mathbf{0{,}5}[\cup]\mathbf{1}\,;\ +\infty[$, $f(x)-g(x)<0$ soit $f(x)<g(x)$ et donc **C_f est strictement en dessous de C_g** ;
- **sur]0,5 ; 1[**, $f(x)-g(x)>0$ soit $f(x)>g(x)$ et donc **C_f est strictement au-dessus de C_g** ;
- **sur {0,5 ; 1}**, $f(x)-g(x)=0$ soit $f(x)=g(x)$ et donc **C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses 0,5 et 1.**

Exercice 5 **Savoir dériver une fonction et étudier ses variations**

METHODE : Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.

1. **f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7$**

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 4x + 5}$
- $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times 5 = -104$

  $\Delta < 0$, donc $f'(x)$ n'admet pas de racine réelle et est du signe de 6 (coefficient de x^2) sur $\mathbb{R}$.

  Finalement, **$f'(x)$ est strictement positif sur** $\mathbb{R}$ et donc **f est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

2. **f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)(6x^2 - 10)$**

- $f(x) = u(x)v(x)$ donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 & \text{et} \quad u'(x) = 2x \\ v(x) = 6x^2 - 10 & \text{et} \quad v'(x) = 12x \end{cases}$

  Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 2x(6x^2 - 10) + (x^2 + 1)12x = 24x^3 - 8x = \boldsymbol{8x(3x^2 - 1)}$

  $$= \boldsymbol{8x(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)}$$

- **Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
signe de $8x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $3x^2 - 1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	

$3x^2 - 1$ est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$3x^2 - 1$ est donc du signe de 3 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(6 \times \frac{1}{3} - 10\right) = \frac{4}{3} \times (-8) = -\frac{32}{3} \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \times (-10) = -10$$

3. **f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x + 1}{2x^2 + 1}$**

- $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x + 1 & \text{et} \quad u'(x) = 4 \\ v(x) = 2x^2 + 1 & \text{et} \quad v'(x) = 4x \end{cases}$

  Par suite, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4(2x^2 + 1) - (4x + 1)4x}{(2x^2 + 1)^2} = \boldsymbol{\dfrac{-8x^2 - 4x + 4}{(2x^2 + 1)^2}}$

- **Pour tout réel x, $(2x^2 + 1)^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-8x^2 - 4x + 4$.**

  Or, $-8x^2 - 4x + 4$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-8) \times 4 = 144$

  $\Delta > 0$, donc $-8x^2 - 4x + 4$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{144}}{2 \times (-8)} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{144}}{2 \times (-8)} = -1$

  $-8x^2 - 4x + 4$ est donc du signe de -8 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines -1 et $\frac{1}{2}$.

  Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	

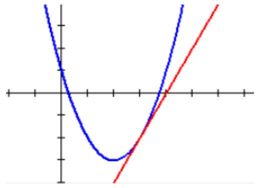
Exercice 6 **Savoir déterminer une équation de la tangente à une courbe**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et C_f sa courbe représentative.

a) Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3 est : $\boxed{y = f'(3)(x-3) + f(3)}$

Or, $f(3) = -2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(3) = 2$.

Par suite, une équation de la tangente est : $y = 2(x-3) - 2$ soit $\boldsymbol{y = 2x - 8}$



b) **A la calculatrice,** comme l'atteste le document ci-contre, il semble bien que la droite T soit tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

Exercice 7 **Savoir lire graphiquement un nombre dérivé.**

1. **a)** $f(2) = 2$, $f(1) = 1$ et $f(-1) = 5$

b) **Lorsque f est dérivable en x, $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f de f au point d'abscisse x :** $f'(2) = 2$, $f'(1) = 0$ et $f'(-1) = -4$.

2. $T_A : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $\boldsymbol{T_A : y = 2x - 2}$

$T_B : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $\boldsymbol{T_B : y = 1}$

$T_C : y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$ soit $\boldsymbol{T_C : y = -4x + 1}$

Exercice 8

□ **PARTIE A** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

1. $\boldsymbol{f'(x)} = 2 \times 3x^2 - 60 \times 2x + 450 = \boldsymbol{6x^2 - 120x + 450}$

2. $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-120)^2 - 4 \times 6 \times 450 = 3\,600 = 60^2$

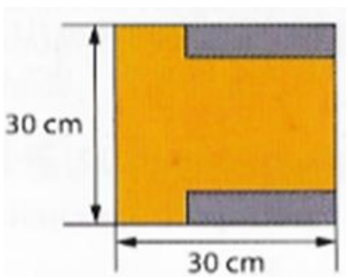
$\Delta > 0$, donc $f'(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{120 - 60}{2 \times 6} = 5$ et $x_2 = \dfrac{120 + 60}{2 \times 6} = 15$

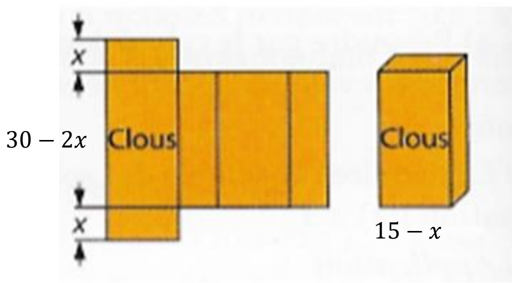
$f'(x)$ est donc du signe de 6 (coef de x^2) sauf entre ses racines 5 et 15.

- **Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
variation de f		↗	1 000	↘	0	↗	

□ **PARTIE B**





1. x désigne la mesure, en cm, de la largeur des bandes découpées, donc $\boldsymbol{x > 0}$.
De plus, $30 - 2x$ désigne la mesure, en cm, de la hauteur de la boîte, donc $30 - 2x > 0$ soit $\boldsymbol{15 > x}$.
Les valeurs prises par x appartiennent donc bien à l'intervalle]0 ; 15[.

2. **a)** Pour tout réel x tel que $0 < x < 15$, les dimensions de la boîte sont, en cm, $30 - 2x$, $15 - x$ et x.
La mesure en cm³ du volume de la boîte est : $\mathrm{V}(x) = (30 - 2x)(15 - x)x$

b) $\mathrm{V}(x) = (30 - 2x)(15 - x)x = (450 - 30x - 30x + 2x^2)x = 2x^3 - 60x^2 + 450x$ *cqfd*

3. La fonction V étant la restriction de la fonction f à l'intervalle]0 ; 15[, d'après la **partie A**, le volume **$\mathrm{V}(x)$ est maximal pour $x = 5$.**
Les dimensions de la boîte de volume maximal sont donc 20 cm, 10 cm et 5 cm et le volume maximal est **égal à $\mathrm{V}(5) = 1\,000$** (cm³).

Exercice 9

1. **La suite (u_n) est définie par son terme général.** Pour calculer le terme d'indice n de la suite, il suffit donc de remplacer n par sa valeur dans l'expression donnée :
   $u_0 = 3 \times 0 - 2 = \mathbf{-2}$ $\quad$ $u_1 = 3 \times 1 - 2 = \mathbf{1}$
   $u_2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$ $\quad$ $u_3 = 3 \times 3 - 2 = \mathbf{7}$
   La suite (v_n) est définie par récurrence. Chaque terme d'indice $n \geq 1$ de la suite est exprimé en fonction du terme précédent :
   $v_0 = \mathbf{2}$ $\quad$ $v_1 = 3 \times v_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$
   $v_2 = 3 \times v_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = \mathbf{10}$ $\quad$ $v_3 = 3 \times v_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = \mathbf{28}$.
2. Pour calculer un terme de la suite (u_n), il suffit d'utiliser une fois l'expression de la suite donnant le terme général de celle-ci. Pour calculer le terme d'indice n de la suite (v_n), il faut utiliser n fois la formule de récurrence définissant la suite.

```
>>> def u(n) :
        u = 3*n-2
        return(u)
```

```
>>> def v(n) :
        v = 2
        for i in range(1, n+1):
            v = 3*v-2
        print(v)
```

Exercice 10

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = \mathbf{8 + 3n}$.
2. Par suite, $u_{50} = 8 + 3 \times 50 = \mathbf{158}$
3. $S = \sum\limits_{k=0}^{50} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$

$$= u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 3 \times 2) + \dots + (u_0 + 3 \times 50)$$
$$= 51u_0 + 3(1 + 2 + \dots + 50)$$
$$= 51 \times 8 + 3\frac{50 \times 51}{2}$$
$$= \mathbf{4\ 233}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique peut aussi être déterminée par la formule :

$$\boxed{\textit{Nombre de termes de la somme} \times \frac{\textit{1er terme de la somme} + \textit{dernier terme de la somme}}{2}}$$

Soit ici, $S = 51 \times \frac{8 + 158}{2} = \mathbf{4\ 233}$

Exercice 11

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = \mathbf{3 \times 2^n}$.
2. Par suite, $u_9 = 3 \times 2^9 = \mathbf{1\ 536}$
3. $S = \sum\limits_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9$

$$= u_0 + (u_0 \times 2) + (u_0 \times 2^2) + \dots + (u_0 \times 2^9)$$
$$= u_0(1 + 2 + 2^2 \dots + 2^9)$$
$$= 3\frac{1 - 2^{9+1}}{1 - 2}$$
$$= 3 \times (2^{10} - 1)$$
$$= \mathbf{3\ 069}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout réel } q \neq 1,\ 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ peut aussi être déterminée par la formule : $\boxed{\textit{1}^{er} \textit{ terme de la somme} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes de la somme}}}{1 - \textit{raison}}}$

Soit ici, $S = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \mathbf{3\ 069}$

Exercice 12

1. La première semaine, 2000 unités sont produites donc $\boldsymbol{u_1 = 2000}$.
   On sait qu'**augmenter une quantité de 10% revient à la multiplier par** $\left(\mathbf{1+\frac{10}{100}}\right) = \mathbf{1,1}$ donc la 2e semaine, le nombre d'unités produites est $\boldsymbol{u_2 = 1,1 \times u_1 = 1,1 \times 2000 = 2200}$.
   De même, $\boldsymbol{u_3 = u_2 \times 1,1 = 2200 \times 1,1 = 2420}$ et $\boldsymbol{u_4 = u_3 \times 1,1 = 2420 \times 1,1 = 2662}$.
2. En généralisant ce qui précède, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = 1,1 \times u_n}$.
   Ainsi, la suite (u_n) est une **suite géométrique de premier terme** $\boldsymbol{u_1 = 2000}$ **et de raison** $\boldsymbol{q = 2000}$.
3. D'après le cours, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2000 \times 1,1^{n-1}}$.
4. La production totale au cours des 20 premières semaines est $\boldsymbol{S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}}$. Cette somme est la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique (u_n) donc :
   $$S = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ termes}}{1 - raison} = u_1 \times \frac{1-q^{20}}{1-q} = 2000 \times \frac{1-1{,}1^{20}}{1-1{,}1} = 20000(1{,}1^{20}-1)$$
   $$\approx 114550.$$
   Au bout de 20 semaines, **l'entreprise aura donc produit environ 114550 alarmes.**
5. **Pour compléter le script de la fonction *somme***, on commence par définir la suite u comme nous l'avions fait dans l'exercice 9. On initialise la valeur de u à 2000 : $u = 2000$, puis on définit la suite par récurrence : $u = u \times 1{,}1$.
   On procède de la même façon pour définir la somme s. On initialise sa valeur : $s = 0$, puis on indique la relation qui permet de calculer la nouvelle somme :
   $nouvelle\ somme = ancienne\ somme + valeur\ de\ la\ suite$ soit $s = s + u$.
   Pour compléter le script de la fonction *seuil*, il suffit de penser qu'il faut calculer les valeurs de $somme(n)$ à partir de $n = 0$, tant que $somme(n) < 150000$ (c'est-à-dire tant que la condition $somme(n) \geq 150000$ n'est pas réalisée).

```
>>> def somme(n):
        u = 2000
        s = 0
        for i in range(1, n+1):
            s = s+u
            u=u*1.1
        return(s)
```

```
>>> def seuil():
        n = 0
        while somme(n)<150000 :
            n = n+1
        return(n)
```

Remarque Comme l'indique la capture d'écran ci-contre, la fonction *seuil* indique $n = 23$, ce qui semble correct car :

$$somme(22) < 150000 < somme(23).$$

L'entreprise aura donc fabriqué plus de 150000 unités à partir de la 23e semaine.

```
>>> seuil()
23
>>> somme(22)
142805.49877367966
>>> somme(23)
159086.04865104763
```

FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 13 **Savoir utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.**

a) $e^5 \times e^{-2} \times e^3 = e^{5+(-2)+3} = \boldsymbol{e^6}$.

b) $(e^5 \times e^2)^4 = (e^{5+2})^4 = (e^7)^4 = e^{7\times4} = \boldsymbol{e^{28}}$.

c) $\frac{e^{-2}\times(e^3)^2}{e^2} = \frac{e^{-2}\times e^{3\times2}}{e^2} = \frac{e^{-2+6}}{e^2} = e^{4-2} = \boldsymbol{e^2}$.

d) Pour tout réel x, $\frac{(e^x)^2 \times e^{x+1}}{e^{x-1}} = \frac{e^{2x}\times e^{x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+(x+1)-(x-1)} = \boldsymbol{e^{2x+2}}$.

Dans cet exercice, on n'utilise notamment les formules suivantes :
pour tout réel a et b et pour tout entier naturel n,
$e^a \times e^b = e^{a+b}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$(e^a)^n = e^{na}$.

Exercice 14 **Savoir résoudre une équation où apparaît la fonction exponentielle.**

a) $e^{x+2} < 1 \quad \Leftrightarrow e^{x+2} < e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2<0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S =]-\infty\,;\,-2[$.

b) $e^{5x+1} \geq e \times e^{2x} \quad \Leftrightarrow e^{5x+1} \geq e^1 \times e^{2x} \quad \Leftrightarrow e^{5x+1} \geq e^{1+2x} \Leftrightarrow 5x+1 \geq 1+2x \Leftrightarrow 3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 0.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S = [0\,;\,+\infty[$.

c) $e^{(x^2)} = e \Leftrightarrow e^{(x^2)} = e^1 \quad \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -1.$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{-1\,;1\}$.

d) On reconnaît une « équation produit nul » donc :

$$(e^x - e^2)(e^{-x}+5) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^2 = 0 \; ou \; e^{-x}+5=0$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^2 \; ou \; e^{-x} = -5 \quad \Leftrightarrow x = 2 \; ou \; e^{-x} = -5$$

L'équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est une fonction à valeurs strictement positives.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{2\}$.

Exercice 15 **Savoir étudier une fonction où apparaît la fonction exponentielle.**

On rappelle la dérivée la fonction exp est la fonction exp : $exp' = exp$.

Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5-x)e^x$.

a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = 5 - x \text{ et } u'(x) = -1 \\ \mathrm{v}(\mathrm{x}) = e^x \text{ et } \mathrm{v}'(\mathrm{x}) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)} = -1e^x + (5-x)e^x = e^x(1+5-x) = \boldsymbol{e^x(4-x)}$.

b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc **$f'(x)$ est du signe de $4 - x$.**

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	e^4	↘	

$f(4) = (5-4)e^4 = e^4$.

Etude de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (e^x+1)(e^x-3)$.

a) $g = u \times v$ donc $g' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x + 1 \text{ et } u'(x) = e^x \\ \mathrm{v}(\mathrm{x}) = e^x - 3 \text{ et } \mathrm{v}'(\mathrm{x}) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{g'(x)} = e^x(e^x-3) + (e^x+1)e^x = e^x(e^x - 3 + e^x + 1) = \boldsymbol{2e^x(e^x-1)}$.

b) Pour tout réel x, $2e^x > 0$ donc **$g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.**

Pour tout réel x, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction g est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	-4	↗	

$g(0) = (e^0+1)(e^0-3) = -4$

Etude de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x-2}{e^x}$.

a) $h = \frac{u}{v}$ donc $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 2 \text{ et } u'(x) = 1 \\ \text{v}(x) = e^x \text{ et } \text{v}'(x) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{h'(x)} = \frac{\mathbf{1}\boldsymbol{e^x} - (\boldsymbol{x}-\mathbf{2})\boldsymbol{e^x}}{(\boldsymbol{e^x})^2} = \frac{e^x(1-(x-2))}{e^{2x}} = e^{-x}(3 - x)$.

b) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $\boldsymbol{h'(x)}$ **est du signe de** $\mathbf{3} - \boldsymbol{x}$**.**

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction h est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	

$$h(3) = \frac{3-2}{e^3} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}.$$

Exercice 16 **Savoir utiliser la formule permettant de calculer la dérivée de e^{ax+b}.**

Le taux d'alcoolémie d'un homme est donné par la fonction f définie sur $I = [0\,;\,4]$ par : $f(x) = 3xe^{-1{,}25x}$.

a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x \text{ et } u'(x) = 3 \\ \text{v}(x) = e^{-1{,}25x} \text{ et } \text{v}'(x) = -1{,}25e^{-1{,}25x}. \end{cases}$

(La dérivée de $x \longmapsto e^{ax+b}$ est $x \longmapsto a \times e^{ax+b}$)

D'où, pour tout réel x de l'intervalle I, $\boldsymbol{f'(x)} = 3e^{-1{,}25x} + 3x \times (-1{,}25) \times e^{-1{,}25x} = \boldsymbol{e^{-1{,}25x}(3 - 3{,}75x)}$

b) Pour tout réel x dans I, $e^{-1{,}25x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3 - 3{,}75x$.

$$3 - 3{,}75x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3{,}75} \Leftrightarrow x = 0{,}8.$$

Ainsi, le tableau de variations de la fonction f est :

x	0		$0{,}8$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2{,}4e^{-1}$	$\searrow$	$12e^{-5}$

$f(0) = 3 \times 0 \times e^{-1{,}25\times 0} = 0$

$f(0{,}8) = 3 \times 0{,}8 \times e^{-1{,}25\times 0{,}8} = 2{,}4e^{-1}$

$f(4) = 3 \times 4 \times e^{-1{,}25\times 4} = 12e^{-5}$.

c) Le taux est donc maximal au bout de 0,8 heures 'est-à-dire au bout de **48 min** (ar 0, 8 × 60 = 48)