Suites numériques

Fiche de cours

Suite : définition

Une **suite** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

La suite u est souvent notée (u_n).

- $u(n) = u_n$ est le **terme d'indice n**.
Le **terme qui précède** u_n est noté u_{n-1}.
Le **terme qui suit** u_n est noté u_{n+1}.

- Dans le plan muni d'un repère, la suite (u_n) est représentée, par le **nuage de points** de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Suite et formule explicite

Une suite u est donnée par une **formule explicite** lorsque le **terme u_n** est donné **en fonction de n**.

Exemple

$u_n = 1 + \dfrac{5}{n+1}$ est une formule explicite.

n	u_n
0	$u_0 = 1 + \dfrac{5}{0+1} = 1 + \dfrac{5}{1} = 6$
1	$u_1 = 1 + \dfrac{5}{1+1} = 1 + \dfrac{5}{2} = 3{,}5$
2	$u_2 = 1 + \dfrac{5}{2+1} = \dfrac{3}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{3}$
…	…

Suite et forme récurrente

Une suite u est donnée sous **forme récurrente** (d'ordre 1) lorsque le **terme u_{n+1}** est donné **en fonction du terme u_n** et qu'un terme est donné.

Un terme est exprimé en fonction du précédent.

Exemple $u_{n+1} = 1 + 0{,}2u_n$ et $u_0 = 3$.

Relation de récurrence

Un terme donné

Pour calculer u_1 à partir de u_0, je remplace n par 0.

Pour calculer u_2 à partir de u_1, je remplace n par 1.

$u_0 = 3 \longrightarrow u_1 = 1 + 0{,}2u_0 = 1 + 0{,}2 \times 3 = 1{,}6 \longrightarrow u_2 = 1 + 0{,}2u_1 = 1 + 0{,}2 \times 1{,}6 = 1{,}32$

Suites et variations

Le nombre p est un entier naturel.

(u_n) est **croissante** (**strictement croissante**) à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ ($u_{n+1} > u_n$)

(u_n) est **décroissante** (**strictement décroissante**) à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ ($u_{n+1} < u_n$).

Une suite est **constante** à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite **monotone** est une suite qui est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Point méthode : déterminer les variations d'une suite (u_n)

méthode n°2

méthode n°1

J'utilise les variations d'une fonction.	**Si $\forall n \geqslant p$, $u_n > 0$, je compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.**	**Je détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.**
Si $u_n = f(n)$ et f est monotone sur $[0\ ;+\infty[$, alors (u_n) et f ont le même sens de variation.	• (u_n) est **croissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. • (u_n) est **décroissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.	• (u_n) est **croissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. • (u_n) est **décroissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Utiliser une formule explicite

37 Pour chaque suite ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, calculer le terme d'indice 3 et le septième terme.

a. $u_n = -5{,}5(n-2) + 4$ **b.** $v_n = 2\sqrt{n+1}$

c. $w_n = 5n^2 - 2n + 6$ **d.** $t_n = 1 + \dfrac{2}{n+1}$

38 Pour chaque suite ci-dessous, calculer les cinq premiers termes.

a. $u_n = \dfrac{3}{2}n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $w_n = (2n+1)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

d. $t_n = \dfrac{-3}{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

39 Pour chaque suite ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, calculer les quatre premiers termes, puis tracer le nuage de points correspondant.

a. $u_n = 2{,}5(-1)^n$ **b.** $v_n = n^2$

c. $w_n = 4 - 3n$ **d.** $t_n = \dfrac{10}{n+1}$

Utiliser une formule récurrente

40 Pour chacune des suites définies ci-dessous, déterminer les cinq premiers termes.

a. (u_n) : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. (v_n) : $v_0 = -2$ et $v_n = -v_{n-1} + 4$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

c. (w_n) : $w_1 = 1$ et $w_{n+1} = w_n{}^2 + n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

d. (t_n) : $t_2 = 0$ et $t_{n+1} = \sqrt{t_n{}^2 + 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

41 Pour chacune des suites ci-dessous :
– associer la fonction qui convient et en tracer la courbe représentative sur l'intervalle I fourni ;
– en déduire graphiquement les quatre premiers termes.

a. $u_0 = 6$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$; $\mathrm{I} = [0 ; 60]$.

b. $v_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n}$; $\mathrm{I} = [0{,}2 ; 5]$
(on admet que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$).

c. $w_0 = -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n{}^2 - w_n - 2$;
$\mathrm{I} = [-3 ; 6]$.

d. $t_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n{}^2 - t_n - 2$; $\mathrm{I} = [-3 ; 12]$.

Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

42 Modéliser le programme de calcul suivant à l'aide d'une relation de récurrence.

– Choisir un nombre.
– Calculer le carré de ce nombre.
– Tripler le résultat obtenu.
– Répéter ces étapes à partir du nombre ainsi obtenu.

43 Une ville compte 195 médecins. En raison des départs à la retraite, elle enregistre chaque année une perte de médecins de 4 % et on estime à 5 le nombre de nouveaux médecins qui s'installent.

• À l'aide d'une suite, modéliser cette situation pour estimer le nombre de médecins dans n années.

Déterminer les variations d'une suite

… en comparant des termes

44 À l'aide d'une différence de termes, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 8n + 3$.

b. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 6n^2 - 2n + 5$.

c. (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_1 = -3$ et $w_{n+1} = w_n - \dfrac{4}{n^2}$.

45 À l'aide d'un quotient de termes, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2$.

b. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1{,}5 \times 0{,}5^n$.

c. (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 0{,}5 \times 1{,}5^n$.

d. (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{5}{n+1}$.

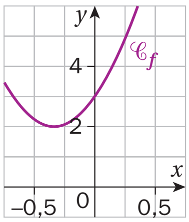
… à l'aide d'une fonction

46 À l'aide d'une fonction, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 7 - 3n$.

b. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 7{,}3$.

c. (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$, dont on donne la représentation graphique ci-contre, qui a pour sommet le point d'abscisse $-\dfrac{1}{3}$.



Suites arithmétiques et géométriques

Fiche de cours

Suite arithmétique

Relation de récurrence

Une suite (u_n) est arithmétique de **raison** r lorsque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

On **ajoute** le même nombre r pour passer d'un terme au suivant.

$$u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Formule explicite

Une suite (u_n) est arithmétique de **raison** r si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme si on connaît un terme et la raison.

Sens de variation

Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.

Suite géométrique

Relation de récurrence

Une suite (u_n) est géométrique de **raison** q lorsque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

On **multiplie** par le même nombre q pour passer d'un terme au suivant.

$$u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Formule explicite

Une suite (u_n) est géométrique de **raison** q si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, avec $n > p$,

$u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme si on connaît un terme et la raison.

Sens de variation

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	(u_n) n'est pas monotone.	(u_n) n'est pas monotone.
$0 < q < 1$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.
$q = 1$	(u_n) est constante égale à u_0.	(u_n) est constante égale à u_0.
$q > 1$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.

Sommes de termes

Suite arithmétique de raison r

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n - p + 1)\frac{(u_p + u_n)}{2}$$

Suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Reconnaître une suite arithmétique

40 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison.

a. $u_0 = -7$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 22{,}5$.

b. $v_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{n}$.

c. $w_0 = 0{,}5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n - \frac{1}{3}$.

d. $t_0 = 44$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 3{,}2t_n$.

41 Pour chacune des suites ci-dessous indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $u_n = (3n + 1)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_n = 22n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. $w_n = n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

d. $t_n = 4{,}8(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

42 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, dont on indique la raison r et le premier terme, donner le terme général.

a. $r = 0{,}1$ et $u_0 = -5$.

b. $r = -10$ et $v_0 = 0{,}55$.

c. $r = 0$ et $w_0 = 1\,000$.

d. $r = 21$ et $t_0 = 0$.

43 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, déterminer les quatre premiers termes.

a. (a_n) de raison $-0{,}3$ et de premier terme $a_0 = 5$.

b. $b_n = 3 - \frac{2n}{3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. (c_n) de raison 4,2 et de premier terme 13.

d. $d_n = 3n - \frac{2}{3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer les variations d'une suite arithmétique

44 Déterminer le sens de variation de chacune des suites de l'exercice **43** en justifiant.

45 Pour chaque suite arithmétique ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, reconnaître la raison et en déduire le sens de variation.

a. $u_0 = -77$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -12 + u_n$.

b. $v_0 = 8{,}2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 7{,}8$.

Reconnaître une suite géométrique

46 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est géométrique et, dans l'affirmative, préciser sa raison.

a. $u_0 = -8$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 63u_n + 2$.

b. $v_0 = -2{,}4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$.

c. $w_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = \frac{1}{n} \times w_n$.

47 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est géométrique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $u_n = 8{,}4(-2)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_n = 13n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. $w_n = 12 \times 3{,}4^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

48 Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, dont on indique la raison q et le premier terme, donner le terme général.

a. $q = 0{,}1$ et $u_0 = -5$.

b. $q = -10$ et $v_0 = 0{,}55$.

c. $q = 1$ et $w_0 = 1\,000$.

Déterminer les variations d'une suite géométrique

49 Déterminer le sens de variation de chacune des suites de l'exercice **48** en justifiant.

50 Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, reconnaître la raison et en déduire le sens de variation.

a. $u_0 = 6$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.

b. $v_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -0{,}25v_n$.

Calculer une somme de termes

51 Calculer les sommes suivantes.

a. $S = 1 + 2 + \ldots + 101$

b. $T = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^8$

c. $Z = 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^7$

52 Pour chacune des suites (w_n) ci-dessous, calculer la somme $S = w_0 + \ldots + w_9$.

a. $w_n = -3 + 2{,}4n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $w_n = 5 \times 0{,}2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Savoir :

- calculer les termes d'une suite : https://www.youtube.com/watch?v=HacflVQ7DIE
- calculer les termes d'une suite avec Python : https://www.youtube.com/watch?v=CYDUNYndHfg
- étudier une suite arithmétique : https://www.youtube.com/watch?v=6O0KhPMHvBA https://www.youtube.com/watch?v=6O0KhPMHvBA
- étudier une suite géométrique : https://www.youtube.com/watch?v=WTmdtbQpa0c https://www.youtube.com/watch?v=gUkOjvAiZGA
- calculer la somme des 1ers termes d'une suite avec Python. https://www.youtube.com/watch?v=_3bwycUCtmg

Exercice 9 **Savoir calculer les premiers termes d'une suite.**

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur ℕ par : $u_n = 3n - 2$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \end{cases}$.

1. Pour chacune de ces suites, calculer les quatre premiers termes.
2. On donne ci-dessous, le script Python d'une fonction permettant de calculer le terme de rang n de chacune de ces suites. Compléter cet algorithme :

```
>>> def u(n):
        u = ...
        return(u)
```

```
>>> def v(n):
        v = ...
        for i in range(1,n+1):
            v = ...
        print(v)
```

Exercice 10 **Etude d'une suite arithmétique.**

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{50}.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{50} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_{50}$.

Exercice 11 **Etude d'une suite géométrique.**

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_9.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_9$.

Exercice 12

Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine, 2000 unités sont produites puis la production augmentera chaque semaine de 10%.

On désigne par u_n le nombre de systèmes fabriqués la *n-ième* semaine. On arrondira les résultats à l'unité.

1. Donner u_1 puis calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer la production totale des 20 premiers semaines.
5. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de semaine sa production totale aura dépassé 150 000 unités. Elle a donc écrit les deux fonctions Python ci-dessous. La première donne la somme des n premiers termes de la suite (u_n). Compléter ces deux scripts afin que la 2e fonction indique à partir de quelle semaine la production totale sera supérieure ou égale à 150 000.

```
>>> def somme(n):
        u = ...
        s = ...
        for i in range(1, n+1):
            s = ...
            u = ...
        return(s)
```

```
>>> def seuil() :
        n = ...
        while ... :
            n = ...
        return(n)
```

Second degré

Fiche de cours

Fonction polynôme du second degré

Forme développée :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$

$a \in \mathbb{R}^*$ $\quad b \in \mathbb{R}$ $\quad c \in \mathbb{R}$

Forme canonique :

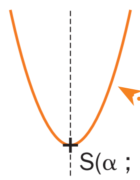
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ $\quad \beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	↘	$f(\alpha) = \beta$	↗

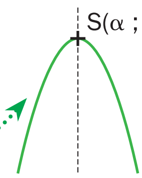
Minimum de f



$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	↗	$f(\alpha) = \beta$	↘

Maximum de f



Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative de f est une **parabole** de sommet S :
– tournée **vers le haut** ;
– tournée **vers le bas**.

Équation du second degré

Les **solutions dans** $\mathbb{R}$ **de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$) correspondent aux **racines** de f.

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	Racines de f	Forme factorisée	Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$
$\Delta > 0$	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ $= a \times (x - x_1) \times (x - x_2)$	Si $a > 0$: x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$ On suppose $x_1 < x_2$ Si $a < 0$: x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$
$\Delta = 0$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ $= a \times (x - x_0)^2$	Si $a > 0$: x : $-\infty$, x_0, $+\infty$; $f(x)$: $+$ 0 $+$ Si $a < 0$: x : $-\infty$, x_0, $+\infty$; $f(x)$: $-$ 0 $-$
$\Delta < 0$	*Aucune*		Si $a > 0$: x : $-\infty$, $+\infty$; $f(x)$: $+$ Si $a < 0$: x : $-\infty$, $+\infty$; $f(x)$: $-$

Lorsque $\Delta > 0$: – la **somme** des racines de f est $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

– le **produit** des racines de f est $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

37 On donne $f(x) = 2{,}5x^2 + 15x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la forme canonique de f est :

$$f(x) = 2{,}5(x + 3)^2 - 13{,}5.$$

b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

38 On donne $h(t) = (-t + 3)(t + 1)$, $t \in [0\ ;\ 3]$.

a. Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 3]$, $h(t) = -(t - 1)^2 + 4$.

b. Dresser le tableau de variations de h sur $[0\ ;\ 3]$.

39 Recopier et compléter pour écrire chaque expression sous forme canonique.

a. $2x^2 + 12x - 6 = 2(x + \ldots)^2 - \ldots$

b. $-3x^2 + 6x + 9 = -3(x - \ldots)^2 + \ldots$

40 Dans chaque cas, écrire la fonction polynôme du second degré sous forme canonique, puis en déduire son tableau de variations.

a. $f_1 : x \mapsto x^2 + 14x + 43$ **b.** $f_2 : x \mapsto x^2 - 12x + 56$

c. $f_3 : x \mapsto -x^2 - 6x - 1$ **d.** $f_4 : x \mapsto 4x^2 - 8x$

e. $f_5 : x \mapsto -2x + 3x^2 + 5$ **f.** $f_6 : x \mapsto -5x^2 - \dfrac{10}{3}x + \dfrac{4}{9}$

Résoudre une équation du second degré

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $6x^2 + 7x + 2 = 0$ **b.** $-5x^2 + 10x + 1 = 0$

c. $4x + 1 + 4x^2 = 0$ **d.** $-x^2 + \sqrt{8}x - 19 = 0$

42 **a.** Déterminer les éventuelles racines des fonctions polynômes du second degré f et g :

$f : x \mapsto -x^2 + 8x - 15$ $g : x \mapsto 16x^2 - 8x + 1$

b. En déduire une forme factorisée de f et de g.

43 Pour chaque fonction polynôme du second degré, déterminer ses racines et une forme factorisée.

a. $f_1 : x \mapsto 2x^2 + 7x - 4$ **b.** $f_2 : x \mapsto 108x^2 - 36x + 3$

c. $f_3 : x \mapsto -3x^2 + x + 2$ **d.** $f_4 : x \mapsto 49x^2 + 28x + 4$

Utiliser l'expression de la somme et du produit des racines

44 Factoriser les fonctions polynômes du second degré suivantes sans calculer leur discriminant.

a. $f : x \mapsto x^2 - 8x + 7$ **b.** $g : x \mapsto 10x^2 - 15x - 10$

c. $h : x \mapsto -x^2 + 8x - 12$ **d.** $k : x \mapsto -5x^2 - 18x + 23$

Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

45 Dresser le tableau de signes des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a. $f_1(x) = x^2 + 14x + 43$ **b.** $f_2(x) = x^2 - 12x + 56$

c. $f_3(x) = -4x^2 + x - 5$ **d.** $f_4(x) = -16x^2 - 24x - 9$

46 **1.** Dresser le tableau de signes des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a. $f(x) = -6x^2 + 23x + 4$ **b.** $g(x) = 14x^2 - 31x - 10$

2. En déduire la résolution des inéquations suivantes.

a. $f(x) < 0$ **b.** $g(x) \geqslant 0$ **c.** $f(x) > 0$ **d.** $g(x) > 0$

47 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $6x^2 + 7x + 2 > 0$ **b.** $-5x^2 + 10x + 1 < 0$

c. $49x^2 + 28x + 4 < 0$ **d.** $-2x^2 + 4x - 4 > 0$

48 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $7x^2 > 3x - 5$ **b.** $-x^2 + x > 1$

c. $2x \leqslant 5x^2 + 4$ **d.** $8x^2 - 10 \geqslant 7x^2$

e. $\dfrac{4}{3}x^2 < \dfrac{2}{7}x + 3$ **f.** $(2x - 3) \times (6x + 4) > x^2 - 6$

Choisir la forme adaptée d'une fonction polynôme du second degré

49 On donne $f(x) = 0{,}75(x + 6)^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est une fonction polynôme du second degré.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (0{,}75x + 6)(x + 4).$$

3. Choisir la forme la plus adaptée pour :

a. calculer $f(0)$;

b. calculer $f(-4)$;

c. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -3$;

d. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < -3$.

50 On donne $g(t) = (2t + 1)^2 - (t - 3)^2$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que g est une fonction polynôme du second degré.

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = (3t - 2)(t + 4).$$

3. Choisir la forme la plus adaptée pour :

a. calculer l'image de 3, puis celle de 0 par g ;

b. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(t) = -8$;

c. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(t) > 0$.

Savoir :

- résoudre une équation du second degré » : https://www.youtube.com/watch?v=youUIZ-wsYk https://www.youtube.com/watch?v=v6fI2RqCCiE
- étudier le signe d'un trinôme : https://www.youtube.com/watch?v=sFNW9KVsTMY https://www.youtube.com/watch?v=pT4xtI2Yg2Q
- étudier la position relative de 2 courbes : https://www.youtube.com/watch?v=EyxP5HIfyF4

Exercice 1 **Savoir résoudre une équation du second degré (ou s'y ramenant).**

1. Niveau 1 : Résoudre les équations suivantes

a) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12} = 0$ **b)** $5x^2 + x + 4 = 0$ **c)** $3x^2 - 4x - 1 = 2x - 4$

2. Niveau 2.

a) Résoudre l'équation $\frac{-x^2 + 2x + 8}{2x + 4} = 0$

b) Montrer que, pour tout réel x, on a l'égalité : $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = (x^2 - 5)(3x^2 + x - 1)$.

Résoudre alors l'équation $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$.

Exercice 2 **Résoudre un problème de degré 2.**

Déterminer trois nombres entiers consécutifs, sachant que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1 877.

Exercice 3 **Savoir étudier le signe d'un polynôme de degré 2 (trinôme).**

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de $f(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 7x + 10$ **2.** $f(x) = -6x^2 + x - 1$

Exercice 4 **Savoir étudier la position relative de deux courbes.**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = x + 4$.

Etudier la position relative des courbes C_f et C_g représentant les fonctions f et g.
(*on commencera par étudier le signe de* $f(x) - g(x)$)

Fonctions dérivées

Fiche de cours

Fonction dérivable, nombre dérivé

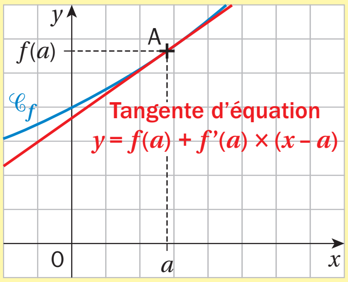
f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in$ I.

- f est **dérivable en a** si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ où ℓ est un nombre réel.
- $f'(a) = \ell$ est le **nombre dérivé** de la fonction f en a.
- f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout nombre réel a de I.
- Lorsque f est dérivable sur I, la **fonction dérivée** de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I.

Interprétation graphique

Si la fonction f est dérivable en a, la droite passant par le point A(a ; $f(a)$) et de pente $f'(a)$ est la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.**

Elle a pour équation $y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$.



Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction …	définie sur …	par …	dérivable sur …	Fonction dérivée
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
puissance	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
racine carrée	$[0 ; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les fonctions dérivées

Les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
Somme : $u + v$	$u' + v'$	I
Multiplication par un nombre réel : ku ($k \in \mathbb{R}$)	ku'	I
Produit : uv	$u'v + uv'$	I
Inverse : $\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	Si $\forall x \in$ I, $v(x) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{v}$ dérivable sur I.
Quotient : $\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $\forall x \in$ I, $v(x) \neq 0$, alors $\dfrac{u}{v}$ dérivable sur I.
Composée : $f : x \mapsto g(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)	$f' : x \mapsto a \times g'(ax + b)$	Si g dérivable sur J et, $\forall x \in$ I, $ax + b \in$ J, alors f dérivable sur I.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point

31 Dans chaque cas, déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

a. $f : x \mapsto -2x + 3$ en $a = 2$.

b. $g : x \mapsto 2x - 5$ en $a = -1$.

c. $k : x \mapsto 2x^2 - 3$ en $a = 2$.

d. $l : x \mapsto 2x^2 + 5x - 2$ en $a = 2$.

32 Dans chaque cas, déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

a. $f : x \mapsto \sqrt{x-5}$ en $a = 5$.

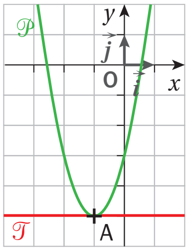
b. $g : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$ en $a = 0$.

c. $k : x \mapsto \sqrt{4x-2}$ en $a = 2$.

d. $l : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ en $a = 0$.

Déterminer une équation d'une tangente

33 On a tracé ci-contre la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, ainsi que la tangente à $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse -1.



a. Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$.

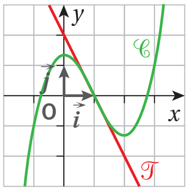
b. Justifier que la parabole $\mathscr{P}$ admet une tangente au point d'abscisse -2. Donner une équation de cette droite.

34 Dans chaque cas, justifier que la fonction f est dérivable en a et déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

a. $f : x \mapsto x^2 + 3x - 1$ en $a = 2$.

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en $a = 3$.

35 On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, notée $\mathscr{T}$.



a. Déterminer par lecture graphique une équation de la droite $\mathscr{T}$.
En déduire $f'(1)$.

b. Déterminer par lecture graphique les valeurs de a pour lesquelles $f'(a) = 0$.

Calculer la dérivée d'une fonction polynôme

36 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto -6x^3$

b. $g : x \mapsto -4x^2 + 8{,}2$

c. $h : x \mapsto -3x^2 + 2x - 18$

d. $k : x \mapsto -2x^3 + 7x^2 - \dfrac{x}{3} + 12$

e. $l : x \mapsto \dfrac{5x^2 - 2x + 9}{3}$

37 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2}{5}$

b. $g : x \mapsto -5x^2 + 7{,}2x - 5$

c. $h : x \mapsto 8x^2 + \dfrac{5x-2}{7}$

d. $k : x \mapsto (3x - 7)^2$

e. $l : x \mapsto (5 - 3x)(5 + 3x)$

Aide Pour **d** et **e**, penser à développer.

Calculer la dérivée d'un produit

38 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée sans développer.

a. $f : x \mapsto 3x\left(x^2 - 1\right)$

b. $g : x \mapsto (-2x + 3)(3x - 5)$

c. $h : x \mapsto \left(-5x^2 + 1\right)\left(2x^2 + 3x\right)$

d. $k : x \mapsto \dfrac{1}{x} \times (3x - 5)$

39 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée sans développer.

a. $f : x \mapsto 5\sqrt{x} \times (3x + 1)$

b. $g : x \mapsto 10x\sqrt{x}$

c. $h : x \mapsto \left(3\sqrt{x} - 1\right)(2x + 1)$

d. $k : x \mapsto (5x + 1)^2$

Calculer la dérivée d'un quotient

40 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{1}{-2x + 4}$

b. $g : x \mapsto \dfrac{3x - 1}{2x + 6}$

c. $h : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

d. $k : x \mapsto \dfrac{x^3}{x + 4}$

41 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

b. $g : x \mapsto \dfrac{2x}{-3x + 1}$

c. $h : x \mapsto \dfrac{-2x + 1}{x^2 + 5x - 1}$

d. $k : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Application de la dérivation

Fiche de cours

Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \geqslant 0$, alors f est **croissante** sur I.	Si $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \leqslant 0$, alors f est **décroissante** sur I.	Si $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

Du tableau de signes de f' au tableau de variations de f

f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$ et α est un nombre réel tel que $\alpha \in [a\,;b]$.

x	a		α		b
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	$f(a)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(b)$

$\forall x \in [a\,;\alpha], f'(x) \geqslant 0$ donc f est **croissante** sur $[a\,;\alpha]$.

$\forall x \in [\alpha\,;b], f'(x) \leqslant 0$ donc f est **décroissante** sur $[\alpha\,;b]$.

Extremum et extremum local d'une fonction

- Si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \leqslant M$ et s'il existe un nombre réel u de I tel que $f(u) = M$, alors M est **le maximum** de la fonction f sur I, atteint en u.
- Si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \geqslant m$ et s'il existe un nombre réel v de I tel que $f(v) = m$, alors m est **le minimum** de la fonction f sur I, atteint en v.

Un **extremum** de f sur I correspond au **maximum** ou au **minimum** de f sur I.

- Un **extremum local** est **un extremum** de f sur un intervalle ouvert inclus dans I.

Condition nécessaire
Si f admet un extremum local en α (qui n'est pas une borne de I), alors $f'(\alpha) = 0$.

Condition suffisante
Si la fonction dérivée f' s'annule en α en changeant de signe, alors f admet un extremum local en α sur I.

Du tableau de signes de f' à l'extremum de f

x		α	
Signe de $f'(x)$	+	0	−
Variations de f	↗	$f(\alpha)$	↘

$f(\alpha) = M$

x		α	
Signe de $f'(x)$	−	0	+
Variations de f	↘	$f(\alpha)$	↗

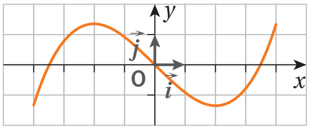
$f(\alpha) = m$

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée

23 On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [–4 ; 4].



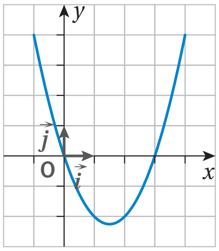
a. Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle [–4 ; 4].
b. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle [–4 ; 4].

24 Voici le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		-1		7		$+\infty$
Variations de f		↘	0	↘	-4	↗	0	↗	

• Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis celui de $f(x)$.

25 On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [–1 ; 4].



a. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [–1 ; 4].
b. On donne :

$$f(-1) = -\frac{11}{6}\ ;\ f(0) = 0\ ;\ f(3) = -4{,}5 \text{ et } f(4) = -\frac{8}{3}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur [–1 ; 4].

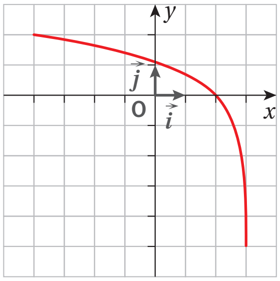
26 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.
a. $f(x) = -4x^2 + x - 11$ **b.** $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 7$
c. $h(x) = x(3x - 1)(-2x + 3)$ **d.** $k(x) = -6x^2 + 30x + 25$
e. $l(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 20$

27 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes définies sur I.
a. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
b. $\mathrm{I} =]0\ ;+\infty[$, $g(x) = \dfrac{x-7}{x}$.
c. $\mathrm{I} =]0\ ;+\infty[$, $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.
d. $\mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $k(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

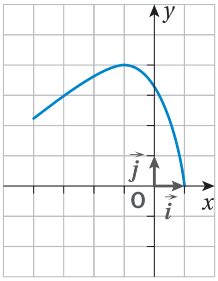
Rechercher un extremum

28 On donne ci-dessous quatre courbes représentatives de fonctions dérivées de fonctions dérivables et définies sur un intervalle I.
Pour chacune d'elles, préciser si la fonction associée admet un extremum et en préciser sa nature (minimum ou maximum). Justifier.

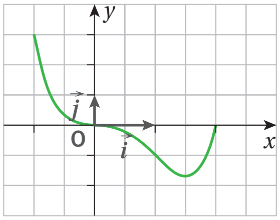
a. I = [–4 ; 3]



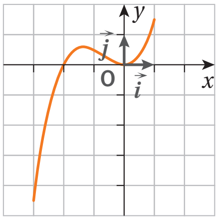
b. I = [–4 ; 1]



c. I = [–1 ; 2]



d. I = [–3 ; 1]

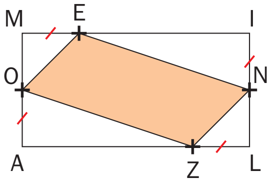


29 Une entreprise produit des clés USB.
La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$B(x) = -x^2 + 10x - 9$$

où x représente le nombre de milliers de clés USB vendues.
• Déterminer le nombre de clés USB à produire pour que cette entreprise réalise un bénéfice mensuel maximal.

30 MILA est un rectangle tel que MI = 4 et IL = 2.
Les points E, N, Z et O sont tels que ME = IN = LZ = AO.



• Existe-t-il une position du point E pour laquelle l'aire du parallélogramme ENZO soit minimale ? Justifier.

VIDEO

Savoir :

- dériver une fonction :
  https://www.youtube.com/watch?v=9Mann4wOGJA
  https://www.youtube.com/watch?v=1fOGueiO_zk
  https://www.youtube.com/watch?v=OMsZNNIIdrw
  https://www.youtube.com/watch?v=-MfEczGz_6Y
- étudier le sens de variations d'une fonction : https://www.youtube.com/watch?v=23_Ba3N0fu4
- déterminer une équation d'une tangente : https://www.youtube.com/watch?v=bELc3OM9osQ
- lire graphiquement un nombre dérivé : https://www.youtube.com/watch?v=0jhxK55jONs

Exercice 5 Savoir dériver une fonction et étudier ses variations

Dans chacun des cas ci-dessous, où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer la fonction dérivée de f et établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7$ **2.** $f(x) = (x^2 + 1)(6x^2 - 10)$ **3.** $f(x) = \dfrac{4x + 1}{2x^2 + 1}$

Exercice 6 Savoir déterminer une équation de la tangente à une courbe

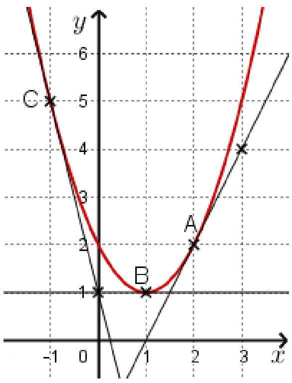
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et C_f sa courbe représentative

a) Déterminer, à la main une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

b) Vérifier votre résultat en traçant, sur votre calculatrice, la tangente T et la courbe C_f.

Exercice 7 Savoir lire un nombre dérivée et déterminer une équation de la tangente à une courbe (bis)

On donne, ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que ses tangentes T_A, T_B et T_C aux points A, B et C d'abscisses respectives
2, 1 et -1.



1. Déterminer graphiquement :

a) $f(2)$, $f(1)$ et $f(-1)$. **b)** $f'(2)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$.

2. En déduire une équation de chacune des tangentes T_A, T_B et T_C.

Exercice 8

PARTIE A

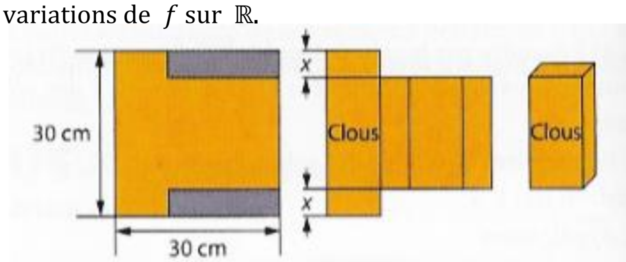
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Un fabricant envisage la production de boîtes pour emballer des clous en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille de carton carrée de côté 30 cm.
On note x la mesure, en cm, de la largeur des bandes découpées.



1. Expliquer pourquoi les valeurs prises par x appartiennent à l'intervalle $]0\,;15[$.

2. a) Soit $V(x)$ le volume, en cm³, de la boîte. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

b) Vérifier que $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

3. Déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal. Quel est ce volume maximal ?

Exponentielle

Fiche de cours

Fonction exponentielle

$$f : x \mapsto \exp(x)$$

C'est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$. Ainsi : $\mathbf{\exp(0) = 1}$ et $\mathbf{\exp'(x) = \exp(x)}$.

$\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718\ 28$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Relations fonctionnelles

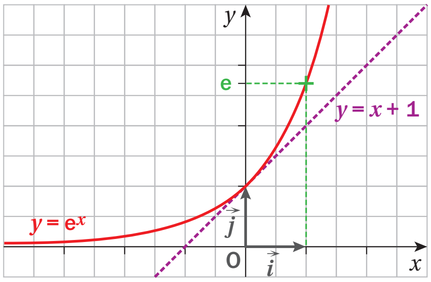
Pour tous nombres réels x et y :

$\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y}$ $\boxed{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1}$ $\boxed{\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$

Variations et signe de la fonction exponentielle

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de exp	↗	1	e	↗

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.



Résolution d'équations et d'inéquations

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$\mathbf{e}^a = \mathbf{e}^b \Leftrightarrow a = b$ $\qquad$ $\mathbf{e}^a > \mathbf{e}^b \Leftrightarrow a > b$.

Modélisation par une croissance ou une décroissance exponentielle

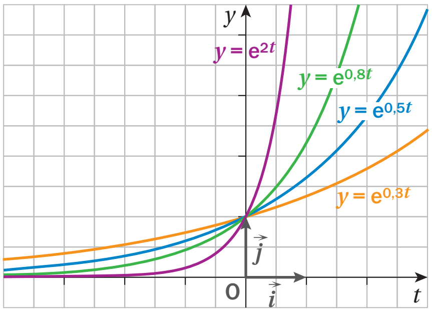
k est un nombre réel strictement positif.

Modélisation par une croissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$$

f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $f_k'(t) = k \times \mathrm{e}^{kt}$.

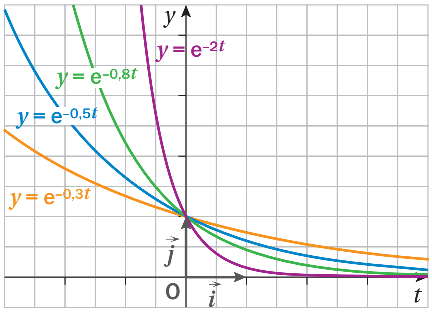


Modélisation par une décroissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$g_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$$

g_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $g_k'(t) = -k \times \mathrm{e}^{-kt}$.



Phénomènes discrets

La représentation graphique de la suite géométrique $(u_0 q^n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$) est un **nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction** $t \mapsto u_0 \mathrm{e}^{bt}$, où b est l'unique nombre réel qui vérifie $\mathrm{e}^b = q$.

- $\forall\, b \in \mathbb{R}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{nb} = (\mathrm{e}^n)^b$
- Si $b > 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement croissante.
  Si $b = 0$, alors la suite (e^{nb}) est constante : tous ses termes valent 1.
  Si $b < 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement décroissante.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Dériver un produit, un quotient

37 Donner une expression de la dérivée de chaque fonction.

a. $f : x \mapsto 3xe^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{2x+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-0,5\}$.

c. $h : x \mapsto e^x \times \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. $k : x \mapsto (3x^2 - 5x + 8) \times e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Utiliser les relations fonctionnelles

38 Associer chaque expression à sa forme simplifiée.

Expressions	Formes simplifiées
1. $e^{-3x} \times e^x$	**a.** e^{-5x}
2. $\dfrac{e^{-3x}}{e^x}$	**b.** e^{-4x}
3. $\dfrac{e^{2x} \times e^{-5x}}{e^{-2x}}$	**c.** e^{-2x}
4. $\dfrac{e^x}{(e^{3x})^2}$	**d.** e^{-x}

39 Montrer que :

a. $e^{6x} \times e^{3x} = \dfrac{(e^x)^3}{e^{-6x}}$

b. $e^x(e^2 + e^{-x}) = e^{-x}(e^{2x+2} + e^x)$

c. $e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1)$

d. $\dfrac{e^{3x}\left(e^{-x} - (e^5)^2\right)}{e^{2x}} = 1 - e^{x+10}$

Résoudre des équations ou des inéquations

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $e^{2x+1} = e^{5x-1}$

b. $e^{x^2} = e^{-5}$

c. $e^{2x^2} = e^{18}$

d. $e^{2x} \times e^{-3x+2} = e^{3x-5}$

e. $e^{x^2-2x-3} = 1$

f. $\dfrac{e^{4x+1}}{e^{2x+3}} = e$

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.

a. $e^{2x} > 1$

b. $e^{-x+3} \geqslant 1$

c. $e^{3+x} < e$

d. $e^{-2x+5} \leqslant e$

e. $e^{x^2+x-6} < 1$

f. $e^{4x-2} \geqslant \dfrac{1}{e}$

Étudier les variations d'une fonction

42 Pour chaque fonction, donner une expression de sa dérivée et en déduire ses variations.

a. $f : x \mapsto e^{-5x+3}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{e^{2x+1}}{3x-5}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

c. $h : x \mapsto (-2x + 5)e^{3x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

d. $k : x \mapsto \dfrac{e^{-x+2}}{x^2 - x - 2}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1 ; 2\}$.

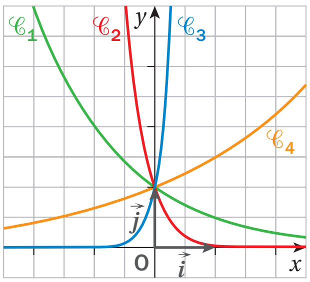
43 Associer chacune des fonctions ci-dessous à sa courbe représentative.

$f : x \mapsto e^{0,4x}$

$g : x \mapsto e^{-3x}$

$h : x \mapsto e^{-0,7x}$

$k : x \mapsto e^{5x}$



44 Recopier et compléter notamment avec les mots « croissante » et « décroissante ».

a. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-5x}$ est strictement …… et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; …) et (1 ; …).

b. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto 3 \times e^{5x-4}$ est strictement …… et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; …) et (1 ; …).

c. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (-3) \times e^{2x-1}$ est strictement …… et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; …) et (1 ; …).

Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

45 Pour chaque suite, définie sur $\mathbb{N}$, dire si elle peut modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle.

a. $u_n = e^{5n}$

b. $v_n = 0,1 \times 7^n$

c. $w_n = 3 \times (0,2)^n$

d. $t_n = e^{-5n}$

46 Les représentations graphiques des suites géométriques ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, appartiennent aux courbes représentatives de fonctions de la forme ae^{kt} ou ae^{-kt} ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$).
Déterminer dans chaque cas la valeur exacte de a et une valeur approchée de k.

a. $u_n = 3 \times 2^n$

b. $v_n = 0,2 \times 3^n$

c. $w_n = (-4) \times (1,3)^n$

d. $t_n = 5 \times 0,8^n$

VIDEO

- revoir les propriétés de exp : https://www.youtube.com/watch?v=aD03wqgxexk&feature=youtu.be
- étudier une fonction avec exp : https://www.youtube.com/watch?v=_MA1aW8ldjo&feature=youtu.be

Exercice 13 **Savoir utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.**

Ici, x désigne un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^5 \times e^{-2} \times e^3$ **b)** $(e^5 \times e^2)^4$ **c)** $\frac{e^{-2} \times (e^3)^2}{e^2}$ **d)** $\frac{(e^x)^2 \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$

Exercice 14 **Savoir résoudre une équation où apparaît la fonction exponentielle.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x+2} < 1$ **b)** $e^{5x+1} \geq e \times e^{2x}$ **c)** $e^{(x^2)} = e$ **d)** $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

Exercice 15 **Savoir étudier une fonction où apparaît la fonction exponentielle.**

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5 - x)e^x \qquad g(x) = (e^x + 1)(e^x - 3) \qquad h(x) = \frac{x - 2}{e^x}$$

Pour chacune de ces fonctions, on demande :

a) d'exprimer la dérivée en fonction de x.

b) d'étudier le signe de la dérivée sur $\mathbb{R}$.

c) de construire le tableau de variations de la fonction.

d) de vérifier le tableau de variations en traçant la courbe de la fonction sur la calculatrice.

Exercice 16 **Savoir utiliser la formule permettant de calculer la dérivée de e^{ax+b}.**

Le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $x = 0$ est donné, en fonction du temps x (en heures), par la fonction f définie sur $I = [0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = 3xe^{-1,25x}.$$

a) Montrer que pour tout x dans I, on a : $f'(x) = (3 - 3{,}75x)e^{-1,25x}$.

b) Etablir le tableau de variation de f sur I.

c) En déduire le nombre de minutes au bout duquel le taux d'alcool est maximal.

Trigogonométrie

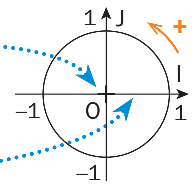
Fiche de cours

Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique

Centre O
Origine du repère

Rayon
OI = OJ = 1

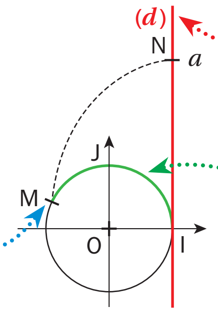


Orientation
sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre)

Enroulement de la droite numérique

À tout nombre réel a, on associe un unique point M du cercle trigonométrique par **enroulement de la droite** (d).

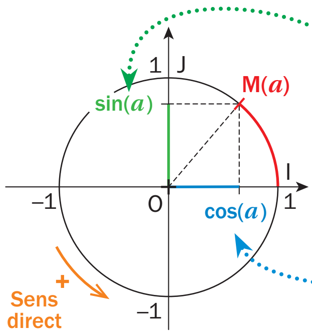
Au point M est associée une infinité de nombres réels de la forme $a + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Droite numérique (d) : tangente au cercle trigonométrique au point I. L'abscisse de N sur (d) est a.

Si $a \in [0\ ;\ 2\pi[$, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{IM}}$ est **proportionnelle** à la mesure de **l'angle** $\widehat{\text{IOM}}$.
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{IM}}$ est égale à la longueur du segment [IN].

Cosinus et sinus d'un nombre réel



Le point M a pour **ordonnée** **sin(a)**.

Le point M a pour **abscisse** **cos(a)**.

Valeurs remarquables

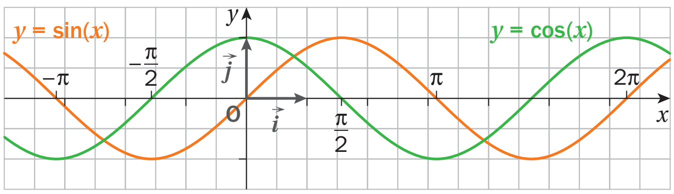
a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle	0°	30°	45°	60°	90°
cos(a)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(a)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$)

- $-1 \leqslant \cos(a) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1$
- $\big(\cos(a)\big)^2 + \big(\sin(a)\big)^2 = 1$
- $\cos(a + k \times 2\pi) = \cos(a)$
- $\sin(a + k \times 2\pi) = \sin(a)$

Fonctions trigonométriques

$\forall x \in \mathbb{R}$,
fonction **sinus** : $x \mapsto \sin(x)$;
fonction **cosinus** : $x \mapsto \cos(x)$.



Propriétés ($x \in \mathbb{R}$)

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

La fonction **sinus** est **impaire**.

La fonction **cosinus** est **paire**.

- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π**.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Se repérer sur le cercle trigonométrique

Calculer la longueur d'un arc de cercle

35 **1.** Quelle est la longueur d'un arc de cercle :

a. de rayon 3 cm et d'angle au centre 45° ?

b. de rayon 3 cm et d'angle au centre 120° ?

2. Quelle est la longueur d'un arc du cercle trigonométrique :

a. d'angle au centre 60° ?

b. d'angle au centre 270° ?

36 Donner un nombre réel positif auquel chacun des points suivants du cercle trigonométrique peut être associé.

a. M tel que $\widehat{IOM} = 36°$.

b. N tel que $\widehat{ION} = 200°$.

c. P tel que $\widehat{IOP} = 150°$.

Placer un point sur le cercle trigonométrique

37 Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D et E associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants.

a. 2π **b.** $\frac{3\pi}{4}$ **c.** $\frac{7\pi}{6}$ **d.** $-\frac{2\pi}{3}$ **e.** $\frac{\pi}{2}$

38 Construire à la règle et au compas sur le cercle trigonométrique les points F, G, H et K associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants.

a. $\frac{2\pi}{3}$ **b.** $-\frac{3\pi}{4}$ **c.** $-\frac{\pi}{6}$ **d.** $\frac{5\pi}{6}$

Aide Pour placer le nombre réel $\frac{\pi}{3}$, on peut tracer un triangle équilatéral.

39 **a.** Placer sur le cercle trigonométrique le point M associé au nombre réel $-\frac{13\pi}{3}$.

b. Quel nombre réel de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ est associé au point M sur le cercle trigonométrique ?

40 Les nombres réels suivants sont-ils associés au même point sur le cercle trigonométrique ?

a. $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{17\pi}{4}$. **b.** $\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. **c.** $-\frac{\pi}{10}$ et $\frac{19\pi}{10}$.

d. $\frac{29\pi}{6}$ et $-\frac{7\pi}{6}$. **e.** $\frac{18\pi}{5}$ et $-\frac{6\pi}{5}$. **f.** $\frac{25\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

Déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel

41 **a.** Préciser les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants.

π $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}$

b. À l'aide du cercle trigonométrique, en déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants.

$-\pi$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{6}$ $\frac{2\pi}{3}$

42 **a.** Avec la calculatrice en mode radian, calculer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

$\frac{3\pi}{10}$ $\frac{2\pi}{5}$ $\frac{\pi}{12}$ $-\frac{\pi}{7}$

On donnera la valeur exacte ou une valeur approchée au centième.

b. Même question pour les nombres réel suivants.

$\frac{4\pi}{9}$ $\frac{5\pi}{11}$ $\frac{13\pi}{7}$ $-\frac{2\pi}{5}$

Traduire graphiquement la parité et la périodicité

43 Recopier et compléter les phrases suivantes.

a. La courbe représentative de la fonction cosinus dans le plan muni d'un repère orthogonal est symétrique par rapport à … .

b. La courbe représentative de la fonction sinus dans le plan muni d'un repère orthogonal est symétrique par rapport à … .

44 **Vrai ou faux ?**

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

a. « La fonction cosinus est croissante sur $[-\pi ; 0]$. »

b. « La fonction sinus est croissante sur $[0 ; \pi]$. »

c. « Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, la fonction cosinus admet un unique minimum. »

d. « La fonction cosinus est croissante sur $[0 ; 2\pi]$. »

e. « Sur l'intervalle $[0 ; 3\pi]$, la fonction sinus admet un unique maximum. »

f. « La fonction sinus est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$. »

Produit scalaire

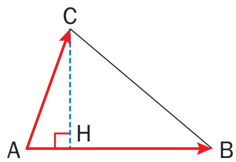
Fiche de cours

Produit scalaire de deux vecteurs…

… avec la projection orthogonale

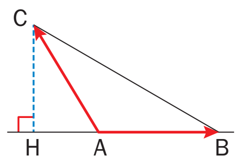
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont …

… de même sens :



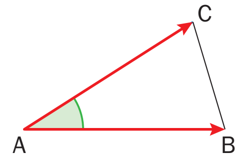
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

… de sens contraire :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

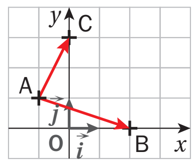
… avec la trigonométrie



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

… avec les coordonnées

Dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = xx' + yy'$

Montrer ou utiliser la perpendicularité ou l'orthogonalité

A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts.

Les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**. $\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux**. $\Leftrightarrow$ Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$. $\Leftrightarrow$ Dans un repère orthonormé : si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $xx' + yy' = 0$.

Calculer…

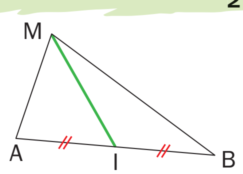
… une distance

Dans un **repère orthonormé** : si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

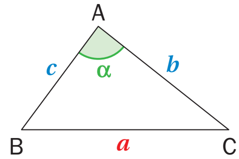
Avec la **médiane** :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Avec les **formules d'Al-Kashi** :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\alpha)$$



… un angle

Dans un **triangle rectangle**, on utilise les formules de **trigonométrie** : cosinus, sinus et tangente.

Avec le **produit scalaire** :

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

Avec les **formules d'Al-Kashi** :

$$\cos\left(\widehat{A}\right) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

Étudier un ensemble $\mathscr{E}$ de points M

k est un nombre réel, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = k$	$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$
$\mathscr{E}$ est une **droite** de vecteur normal $\vec{u}$.	$\mathscr{E}$ est l'**ensemble vide**, ou le **point** I, milieu de [AB], ou un **cercle** de centre I.

Les incontournables

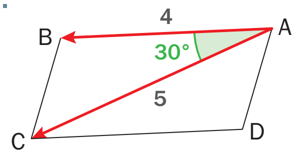
Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

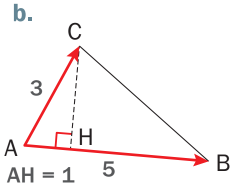
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

34 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

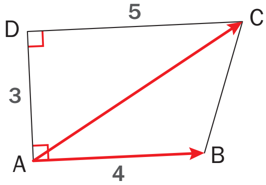
a.



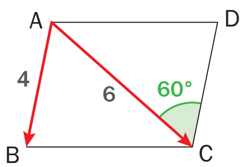
b.



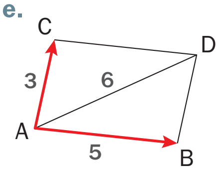
c.



d.



e.



35 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$. Calculer :

a. $-2\vec{u}\cdot(3\vec{u} + \vec{v})$ **b.** $(2\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v})$

c. $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ **d.** $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

Démontrer l'orthogonalité

36 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.
Sont-ils orthogonaux ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

37 A(−2 ; 5), B(4 ; 3) et C(1 ; −6) sont trois points du plan.

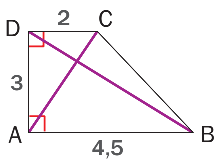
a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

38 Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze rectangle.

• Démontrer que les diagonales du trapèze sont perpendiculaires.



Calculer des longueurs et des mesures d'angle

39 A(4 ; 1), B(0 ; 5) et C(−2 ; −1) sont trois points du plan.

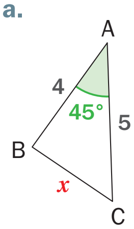
a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

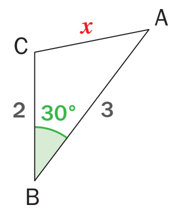
c. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

40 ABC est un triangle.
Déterminer la longueur x du côté manquant, dans chacun des cas suivants.

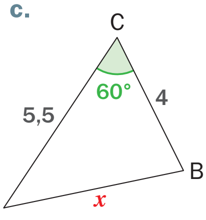
a.



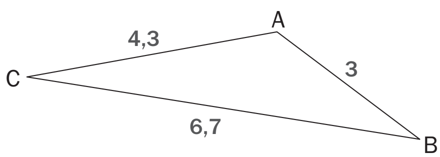
b.



c.



41 ABC est un triangle tel que AB = 3 cm, AC = 4,3 cm et BC = 6,7 cm.



a. Déterminer une valeur approchée des mesures des angles du triangle ABC.

b. I est le milieu du segment [BC] ; calculer la longueur AI.

Étudier un ensemble de points

42 [AB] est un segment de longueur 6 cm.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 20$;

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -10$.

2. Représenter graphiquement ces ensembles.

43 ABC est un triangle tel que AB = 8, AC = 5 et $\widehat{BAC} = 60°$.

a. Calculer BC et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Géométrie repérée

Fiche de cours

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

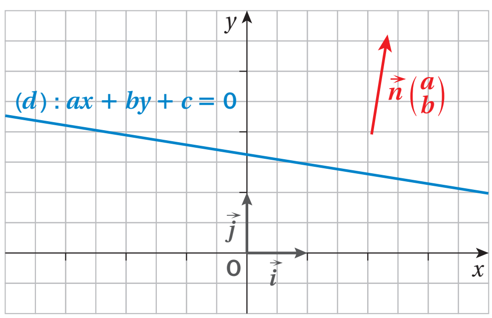
Droites

a, b et c sont trois nombres réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

$ax + by + c = 0$
est une **équation cartésienne** de la droite (d)

$\Leftrightarrow$

le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul est **normal à (d)**

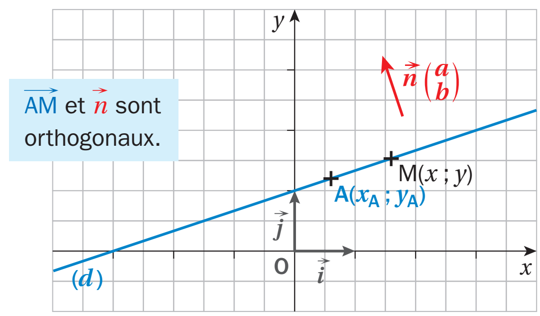


Équation de la **droite (d)**
passant par A de **vecteur normal $\vec{n}$**

$\mathrm{M} \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_{\mathrm{A}}) + b(y - y_{\mathrm{A}}) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by - ax_{\mathrm{A}} - by_{\mathrm{A}} = 0$

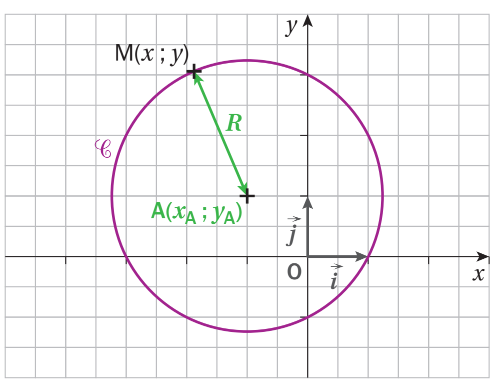


Cercles

Équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon R

$\mathrm{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \mathrm{AM}^2 = R^2$

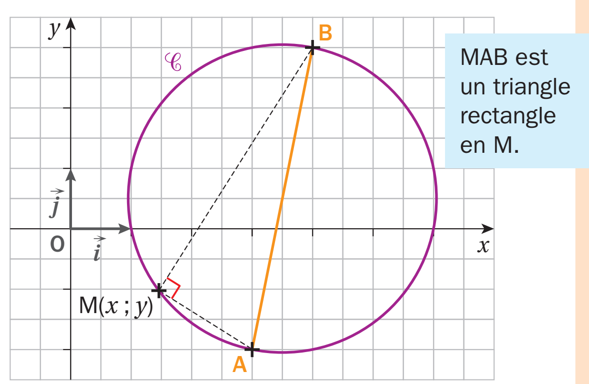
$\Leftrightarrow (x - x_{\mathrm{A}})^2 + (y - y_{\mathrm{A}})^2 = R^2$



Équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]

$\mathrm{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_{\mathrm{A}})(x - x_{\mathrm{B}}) + (y - y_{\mathrm{A}})(y - y_{\mathrm{B}}) = 0$

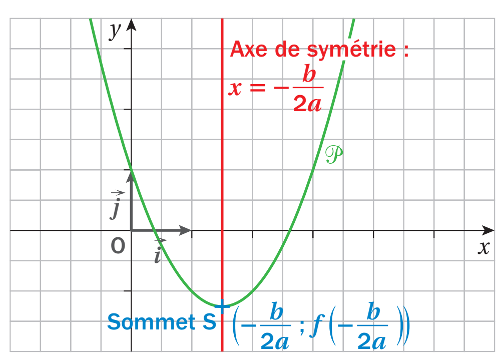


Paraboles

a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.
La **parabole $\mathscr{P}$** qui représente la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet :

– un **axe de symétrie** d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$;

– un **sommet S** de coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.



Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Déterminer une équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée

36 Déterminer un vecteur normal à chacune des droites définies ci-dessous.

a. (d) passe par le point A(3 ; –4) et a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. (d) est la droite passant par les deux points B(–2 ; 4) et C(0 ; 1).

c. (d) est la droite d'équation $x - 3y - 11 = 0$.

d. (d) est la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x + 2$.

37 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par K(2 ; –5) et perpendiculaire à la droite d'équation $3x - 4y + 1 = 0$.

38 A(–1 ; 3), B(2 ; 1) et C(–2 ; 2) sont trois points du plan.

1. Déterminer une équation de la médiatrice :

a. du segment [AB] ;

b. du segment [AC].

2. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

39 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A(1 ; 4) sur la droite (d) d'équation :

$$x + 3y - 7 = 0.$$

40 On définit un triangle DEF tel que D(–1 ; 4), E(2 ; 1) et F(–2 ; 1).

a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de F sur (DE).

b. Calculer la longueur FH.

c. En déduire l'aire du triangle DEF.

Déterminer une équation de cercle

41 Dans chaque cas, déterminer une équation du cercle défini par les conditions données.

a. Le cercle de centre $\Omega(1 ; -7)$ de rayon 5.

b. Le cercle de centre $\Omega(-2 ; -1)$ et passant par le point A(1 ; 3).

c. Le cercle de diamètre [BC] avec B(3 ; 5) et C(–8 ; 6).

42 D(–6 ; –6), E(9 ; 3) et F(6 ; 8) sont trois points du plan.

a. Démontrer que le triangle DEF est rectangle.

b. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle DEF.

43 G(5 ; 1), H(–3 ; 1) et I(0 ; 6) sont trois points du plan.

● Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle GHI.

Déterminer les caractéristiques d'un cercle

44 Dans chaque cas, indiquer le centre et le rayon du cercle défini par l'équation donnée.

a. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$ **b.** $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

c. $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ **d.** $x^2 + (y + 2)^2 = 3$

e. $x^2 + y^2 - 8 = 0$ **f.** $4x^2 + 4(y - 2)^2 = 9$

45 Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui, préciser les caractéristiques du cercle.

a. $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 5 = 0$

b. $x^2 + 5x + y^2 - 10y = -8$

c. $x^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

d. $x^2 - x + y^2 + 2y + 3 = 0$

e. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

f. $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$

46 Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 - m^2 = 0$ est une équation de cercle.

Déterminer les caractéristiques d'une parabole

47 Dans chaque cas, indiquer les coordonnées du sommet de la parabole définie par l'équation donnée.

a. $y = 3x^2 - 2x + 1$ **b.** $y = 4(x + 5)^2 - 1$

c. $y = (x - 2)(x + 4)$ **d.** $y = -2x(x - 1) - 7$

48 Dans chaque cas, indiquer si la droite d'équation $x = -3$ est l'axe de symétrie de la parabole définie par l'équation donnée.

a. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$ **b.** $y = (x - 3)^2 + 4$

c. $y = -2(x + 3) + x^2$ **d.** $y = -2(x + 1)^2 - 3$

Corrigés p. 368

Probabilités conditionnelles

Fiche de cours

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une probabilité P définie sur Ω.
A, B et C sont trois évènements de Ω. On suppose que $P(A) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

La **probabilité de « B sachant A »** (sous-entendu que A est réalisé) **est :**

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

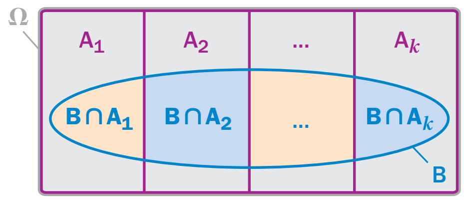
$$P_A(B) = \frac{\text{probabilité de l'intersection}}{\text{probabilité de la condition}}$$

- $P_A(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$
- Si $B \cap C = \varnothing$, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$
- Si $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

Partition et formule des probabilités totales

Les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) forment une **partition** de l'univers Ω si et seulement si :

- $A_1 \neq \varnothing, A_2 \neq \varnothing, \ldots, A_k \neq \varnothing$;
- si i et j sont dans $\{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$.

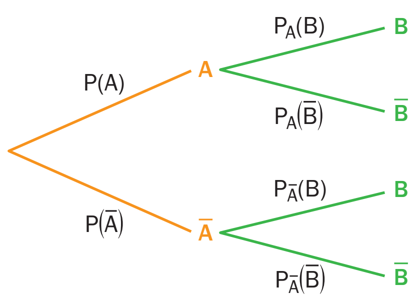


Formule des probabilités totales :
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k)$$

Formule des probabilités totales, avec le cas particulier de la partition $\{A, \overline{A}\}$: $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

Arbre pondéré

Représentation de la succession de deux épreuves



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

On peut aussi représenter cette situation à l'aide d'un tableau.

	A	$\overline{A}$	Total
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
Total	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

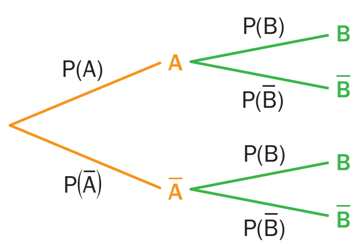
Règle de la somme
La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Règle du produit
La probabilité d'un chemin, constitué d'une succession de branches, est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches.

Indépendance

- **A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.**
- **Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $P_A(B) = P(B)$.**

La réalisation de A n'influe pas sur la réalisation de B.
Dans ce cas, la situation peut être illustrée par l'arbre ci-contre.



Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Calculer une probabilité conditionnelle

29 On donne deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}35$ et $P(A \cup B) = 0{,}4$.

1. a. Calculer $P(A \cap B)$.

b. Recopier le tableau ci-contre et le compléter à l'aide des données de l'énoncé.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B			
$\overline{B}$			
TOTAL			

2. a. Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{B}}(A)$.

b. Rédiger une phrase d'interprétation pour chacune des probabilités précédentes.

30 Lors du déménagement d'un CDI, des ouvrages de mathématiques et de SVT, de deux types, manuels scolaires ou annales de baccalauréat, ont été mis en vrac dans un carton. Le logiciel de recherche du CDI indique que parmi les 65 manuels scolaires placés dans le carton, 35 sont des manuels de mathématiques et que, parmi les 25 annales, il y en a 10 de SVT.

1. Résumer les données de l'énoncé dans un tableau à compléter entièrement.

2. On prend au hasard un ouvrage dans le carton.

a. Quelle est la probabilité que ce soit un manuel scolaire de mathématiques ?

b. Si l'ouvrage est un manuel scolaire, quelle est alors la probabilité qu'il traite de mathématiques ?

c. Si l'ouvrage concerne les SVT, quelle est alors la probabilité qu'il s'agisse d'annales ?

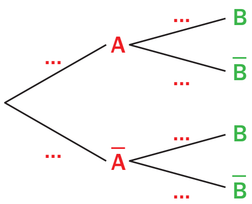
Illustrer une situation à l'aide d'un arbre pondéré

31 A et B sont deux évènements d'un univers Ω tels que $P(\overline{A}) = 0{,}6$, $P_A(\overline{B}) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}7$.

a. Recopier et compléter entièrement l'arbre ci-contre.

b. Donner les valeurs de $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

c. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(A \cap \overline{B})$.



32 16 % des clients d'un magasin d'aquariophilie achètent des poissons d'eau de mer et parmi eux 45 % achètent des poissons-clowns. Parmi les clients qui achètent des poissons d'eau douce, 78 % achètent des poissons rouges.

On interroge au hasard un client de ce magasin.

- Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.

Utiliser la formule des probabilités totales

33 Au rayon des guirlandes lumineuses d'un magasin de décoration, 66 % des guirlandes fonctionnent sur secteur et les autres avec des piles. Parmi les guirlandes fonctionnant avec des piles, 42 % ont l'option minuteur et parmi celles qui fonctionnent sur secteur, 38 % ont cette option.

On choisit au hasard une guirlande dans le rayon. On note S l'évènement « la guirlande fonctionne sur secteur » et M l'évènement « la guirlande a l'option minuteur ».

a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Calculer $P(S \cap M)$ et $P(\overline{S} \cap M)$.

c. En déduire $P(M)$, puis $P_M(S)$.

d. Rédiger une phrase d'interprétation des deux probabilités précédentes.

Étudier l'indépendance de deux évènements

34 A et B sont deux évènements d'un univers Ω.

Dans chacun des cas suivants, justifier si les évènements A et B sont indépendants ou non.

a. $P(A) = 0{,}21$, $P(B) = 0{,}79$ et $P(A \cap B) = 0{,}17$.

b. $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cup B) = 0{,}84$.

c. $P(A) = 0{,}19$, $P(B) = 0{,}81$ et $P_A(B) = 0{,}1539$.

35 A et B sont deux évènements indépendants d'un univers Ω tels que $P(A) = 0{,}18$ et $P_A(B) = 0{,}48$.

- Déterminer $P(B)$, $P_B(A)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Étudier une répétition de deux épreuves indépendantes

36 On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire deux fois de suite une carte avec remise. On note R_1 l'évènement « obtenir une carte rouge au premier tirage » et N_2 l'évènement « obtenir une carte noire au second tirage ».

1. a. Justifier que les deux tirages constituent deux épreuves indépendantes.

b. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer la probabilité de tirer :

a. deux cartes noires ;

b. au plus une carte rouge.

Variables aléatoires

Fiche de cours

Définir et exploiter la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Pour une expérience aléatoire d'univers Ω, **définir une variable aléatoire** X, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

On peut alors générer des évènements :

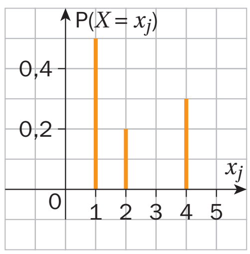
- $\{X = x\}$: « la variable aléatoire X prend la valeur x » ;
- $\{X \leqslant x\}$: « la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à x ».

▸ Pour une variable aléatoire X, définir la **loi de probabilité de** X, c'est associer à chaque valeur prise par X une probabilité.

Valeur prise x_j	x_1	...	x_r
Probabilité $P(X = x_j)$	p_1	...	p_r

La somme des probabilités doit valoir 1 : $p_1 + ... + p_r = 1$.

▸ On peut **représenter** une variable aléatoire X en représentant les valeurs $P(X = x_j)$ par des barres.



▸ On peut **simuler** une variable aléatoire X à l'aide d'une fonction en Python où les valeurs prises par X sont renvoyées avec la probabilité définie dans la loi de probabilité de X.

```
import random
def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.5:
        return 1
    if alea<0.7:
        return 2
    return 4
```

Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

▸ L'**espérance** de X est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + ... + p_r \times x_r.$$

▸ La **variance** de X est :

$$V(X) = p_1 \times \left(x_1 - E(X)\right)^2 + ... + p_r \times \left(x_r - E(X)\right)^2.$$

▸ L'**écart type** de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Après un grand nombre de **simulations** de X :
- la valeur moyenne prise par X est proche de l'espérance de X ;
- l'écart type des valeurs prises par X est proche de l'écart type de X.

Détermination de l'espérance et de l'écart type avec python

Pour une variable aléatoire X, on crée deux listes :
- Lx contenant les valeurs prises par X ;
- Lp contenant les probabilités de ces valeurs.

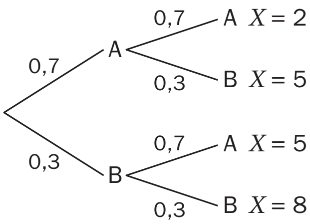
```
def Esp(Lx,Lp):
    L=[Lp[i]*Lx[i] for i in range(len(Lx))]
    return sum(L)

def E_Type(Lx,Lp):
    L=[Lp[i]*(Lx[i]-Esp(Lx,Lp))**2 for i in range(len(Lx))]
    return sum(L)
```

Modéliser une expérience aléatoire à l'aide d'une variable aléatoire

▸ Une **répétition** d'expériences aléatoires peut être modélisée par un **arbre pondéré.**

▸ La **valeur prise par la variable aléatoire** peut être notée au bout de chaque chemin de l'arbre.



Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

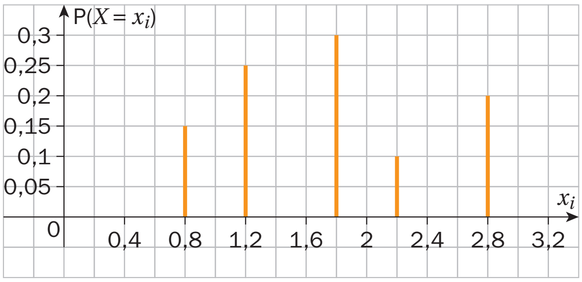
Déterminer une loi de probabilité

25 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_k	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x_k)$	0,20	$2p$	$3p$	0,09	0,16	0,30

a. Déterminer la valeur de p.
b. Calculer la probabilité des évènements $\{X \geqslant 3\}$, $\{X < 1\}$ et $\{1 < X < 4\}$.

26 La loi de probabilité de la variable X est donnée par le graphique suivant.



a. Présenter cette loi à l'aide d'un tableau.
b. Calculer $P(X < 2)$, $P(X > 2{,}8)$ et $P(1{,}6 < X < 2{,}5)$.

27 On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenu.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer $P(X < 2)$.
c. Calculer la probabilité que X soit au moins égale à 3.
d. Calculer la probabilité que X soit au plus égale à 1.

Simuler une variable aléatoire

28 PROGRAMMATION python

La loi de la variable aléatoire X est :

x_i	-5	5	10	15
$P(X = x_i)$	0,16	0,27	0,34	0,23

a. Rédiger une fonction en Python `simu_X()` simulant la variable aléatoire X.
b. Recopier et compléter la fonction `moy` afin d'estimer l'espérance de X.

```
import random
import math

def moy(n):
    mu=0
    for simu in range(n):
        mu=...
    return ...
```

c. En modifiant cette fonction, créer une fonction en Python afin d'estimer l'écart type de X.

Calculer des indicateurs

29 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_k	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_k)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

1. Calculer l'espérance et l'écart type de X.
2. On pose $Y = X + 4$, $Z = 2{,}3X$ et $T = -X + 1$.
Pour chacune de ces variables aléatoires :
a. dresser sa loi de probabilité ;
b. calculer son espérance et son écart type.

30 Dans un groupe scolaire, deux tombolas sont organisées durant l'année. À chaque occasion, trois cents billets sont mis en vente. La tombola de Noël offre un lot de 100 €, six lots de 50 € et dix lots de 5 €. La tombola de fin d'année offre quatre lots de 50 €, deux lots de 25 € et quarante lots de 5 €. X et Y sont les variables aléatoires associées aux montants des lots, par ticket acheté, pour la tombola de Noël et la tombola de fin d'année.
a. Donner les lois de probabilité de X et Y.
b. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
c. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$ et en $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
d. Comparer les deux tombolas.

Étudier une variable aléatoire définie par répétition

31 Durant l'année scolaire 2012-2013, 8,3 enfants sur 10 scolarisés en grande section de maternelle étaient vaccinés contre la rougeole.
Dans une classe, on choisit au hasard trois élèves.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants vaccinés parmi ces élèves.
a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.

32 Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : deux rouges, trois bleues et cinq marron.
Un joueur tire une boule au hasard : si elle est rouge, il gagne 12 € ; si elle est bleue, il perd 10 € ; si elle est marron, il remet la boule et rejoue.
Si la seconde boule tirée est rouge, il gagne 10 € ; sinon, il perd 8 €.
a. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré et déterminer l'ensemble des issues possibles.
b. Préciser la loi de probabilité de la variable aléatoire G égale au gain du joueur.

Corrigés des exercices

Chapitre 1. Suites

Les incontournables

37 **a.** $u_3 = -5{,}5(3-2) + 4 = -1{,}5$; $u_6 = -5{,}5(6-2) + 4 = -18$.

b. $v_3 = 2\sqrt{4} = 4$; $v_6 = 2\sqrt{7}$.

c. $w_3 = 5 \times 3^2 - 2 \times 3 + 6 = 45$; $w_6 = 5 \times 6^2 - 2 \times 6 + 6 = 174$.

d. $t_3 = 1 + \dfrac{2}{3+1} = 1{,}5$; $t_6 = 1 + \dfrac{2}{6+1} = \dfrac{9}{7}$.

38 **a.** $u_0 = 0$; $u_1 = 1{,}5$; $u_2 = 3$; $u_3 = 4{,}5$ et $u_4 = 6$.

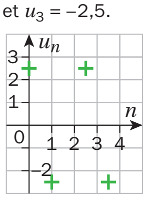
b. $v_1 = 1$; $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $v_4 = \dfrac{1}{2}$ et $v_5 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

c. $w_0 = 1$; $w_1 = 9$; $w_2 = 25$; $w_3 = 49$ et $w_4 = 81$.

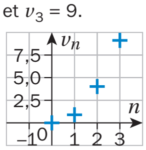
d. $t_2 = -3$; $t_3 = -1{,}5$; $t_4 = -1$; $t_5 = -0{,}75$ et $t_6 = -0{,}6$.

39

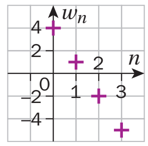
a. $u_0 = 2{,}5$; $u_1 = -2{,}5$; $u_2 = 2{,}5$ et $u_3 = -2{,}5$.



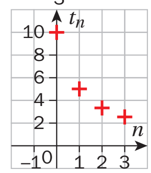
b. $v_0 = 0$; $v_1 = 1$; $v_2 = 4$ et $v_3 = 9$.



c. $w_0 = 4$; $w_1 = 1$; $w_2 = -2$ et $w_3 = -5$.



d. $t_0 = 10$; $t_1 = 5$; $t_2 = \dfrac{10}{3}$ et $t_3 = 2{,}5$.



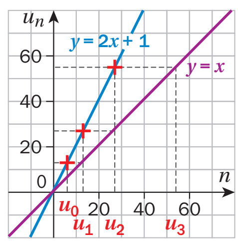
40 **a.** $u_0 = 6$; $u_1 = 4$; $u_2 = \dfrac{8}{3}$; $u_3 = \dfrac{16}{9}$ et $u_4 = \dfrac{32}{27}$.

b. $v_0 = -2$; $v_1 = 6$; $v_2 = -2$; $v_3 = 6$ et $v_4 = -2$.

c. $w_1 = 1$; $w_2 = 2$; $w_3 = 6$; $w_4 = 39$ et $w_5 = 1\,525$.

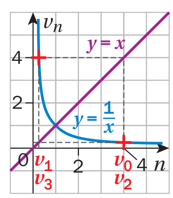
d. $t_2 = 0$; $t_3 = 1$; $t_4 = \sqrt{2}$; $t_5 = \sqrt{3}$ et $t_6 = 2$.

41 **a.**



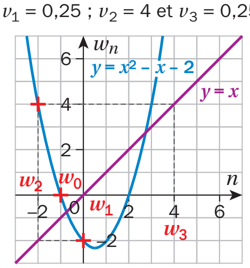
$u_0 = 6$; $u_1 = 13$; $u_2 = 27$ et $u_3 = 55$.

b.



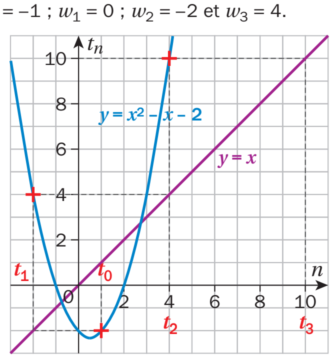
$v_0 = 4$; $v_1 = 0{,}25$; $v_2 = 4$ et $v_3 = 0{,}25$.

c.



$w_0 = -1$; $w_1 = 0$; $w_2 = -2$ et $w_3 = 4$.

d.



$t_0 = 1$; $t_1 = -2$; $t_2 = 4$ et $t_3 = 10$.

42 $u_{n+1} = 3 \times u_n^2$

43 $u_0 = 195$ et $u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 5$.

44 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} - u_n = 8(n+1) + 3 - (8n+3)$
$= 8 > 0$
donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} - v_n = 6(n+1)^2 - 2(n+1) + 5 - (6n^2 - 2n + 5)$
$= 12n + 4 > 0$
donc (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{4}{n^2} < 0$
donc (w_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

45 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1+2}{n+2} = 1 + \dfrac{1}{n+2} > 1$
donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et
$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1{,}5 \times 0{,}5^{n+1}}{1{,}5 \times 0{,}5^n} = 0{,}5 < 1$
donc (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$ et
$\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{0{,}5 \times 1{,}5^{n+1}}{0{,}5 \times 1{,}5^n} = 1{,}5 > 1$
donc (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$ et
$\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{5}{n+2} \times \dfrac{n+1}{5} = \dfrac{n+1}{n+2} < 1$
donc (t_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

46 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n = f(n)$ avec $f(x) = 7 - 3x$. f est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7{,}3 = f(n)$ avec $f(x) = 7{,}3$. f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc (v_n) est constante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 9n^2 + 6n + 3 = f(n)$ avec $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$. D'après le graphique, f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, donc (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Chapitre 2. Suites arithmétiques et géométriques

Les incontournables

40 **a.** $u_1 = -(-7) + 22{,}5 = 29{,}5$ et $u_2 = -29{,}5 + 22{,}5 = -7$. $u_1 - u_0 = 36{,}5$ et $u_2 - u_1 = -36{,}5$. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}$ non constant, donc (v_n) n'est pas arithmétique.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{3}$ constant, donc (w_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

d. $t_1 = 3{,}2 \times 44 = 140{,}8$ et $t_2 = 3{,}2 \times 140{,}8 = 450{,}56$.
$t_1 - t_0 = 96{,}8$ et $t_2 - t_1 = 309{,}76$. $t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1$ donc (t_n) n'est pas arithmétique.

41 **a.** $u_0 = 1$; $u_1 = 16$ et $u_2 = 49$.
$u_1 - u_0 = 15$ et $u_2 - u_1 = 33$.
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

b. $v_n = 22n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $v_0 + nr$, donc (v_n) est arithmétique de raison $r = 22$ et de premier terme $v_0 = 0$.

c. $w_n = n + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $w_0 + nr$, donc (w_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $w_0 = 1$.

d. $t_1 = -4{,}8$; $t_2 = 4{,}8$ et $t_3 = -4{,}8$.
$t_2 - t_1 = 9{,}6$ et $t_3 - t_2 = -9{,}6$.
$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ donc (t_n) n'est pas arithmétique.

42 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 + 0{,}1n$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}55 - 10n$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1\,000$.
d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 21n$.

43 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5 - 0{,}3n$.
$a_0 = 5$; $a_1 = 4{,}7$; $a_2 = 4{,}4$ et $a_3 = 4{,}1$.
b. $b_0 = 3$; $b_1 = \dfrac{7}{3}$; $b_2 = \dfrac{5}{3}$ et $b_3 = 1$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 13 + 4{,}2n$.
13 ; 17,2 ; 21,4 et 25,6.
d. $d_0 = -\dfrac{2}{3}$; $d_1 = \dfrac{7}{3}$; $d_2 = \dfrac{16}{3}$ et $d_3 = \dfrac{25}{3}$.

44 **a.** (a_n) est de raison $r = -0{,}3 < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
b. (b_n) est de raison $r = -\dfrac{2}{3} < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
c. (c_n) est de raison $r = 4{,}2 > 0$, donc elle est strictement croissante.
d. (d_n) est de raison $r = 3 > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

45 **a.** (u_n) est de raison $r = -12 < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
b. (v_n) est de raison $r = 7{,}8 > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

46 **a.** $u_0 = -8$; $u_1 = 63 \times (-8) + 2 = -502$ et $u_2 = 63 \times (-502) + 2 = -31\,624$.
$\dfrac{u_1}{u_0} = 62{,}75$ et $\dfrac{u_2}{u_1} \simeq 62{,}996$.
$\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

b. $v_0 = -2{,}4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{7}v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{7}$.

c. $w_1 = 1$; $w_2 = \dfrac{1}{1} \times 1 = 1$ et $w_3 = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$.
$\dfrac{w_2}{w_1} = 1$ et $\dfrac{w_3}{w_2} = \dfrac{1}{2}$.
$\dfrac{w_2}{w_1} \neq \dfrac{w_3}{w_2}$ donc (w_n) n'est pas géométrique.

47 **a.** $u_n = 8{,}4(-2)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $u_0 \times q^n$, donc (u_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $u_0 = 8{,}4$.
b. $v_0 = 0$; $v_1 = 13$; $v_2 = 26$ et $v_3 = 39$.
$\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{26}{13} = 2$ et $\dfrac{v_3}{v_2} = \dfrac{39}{26} = 1{,}5$.
$\dfrac{v_2}{v_1} \neq \dfrac{v_3}{v_2}$ donc (v_n) n'est pas géométrique.
c. $w_n = 12 \times 3{,}4^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $w_0 \times q^n$, donc (w_n) est géométrique de raison $q = 3{,}4$ et de premier terme $w_0 = 12$.

48 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 \times 0{,}1^n$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}55 \times (-10)^n$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1\,000$.

49 **a.** (u_n) est de premier terme $u_0 = -5 < 0$ et de raison $q = 0{,}1 \in \,]0\,;1[$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. (v_n) est de raison $q = -10 < 0$, donc elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.
c. (w_n) est de premier terme $w_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1$, donc elle est constante sur $\mathbb{N}$, égale à 1 000.

50 **a.** (u_n) est de raison $q = 2 > 1$ et $u_0 = 6 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. (v_n) est de raison $q = -0{,}25 < 0$, donc elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

51 **a.** $S = 1 + 2 + \ldots + 101$
$= \dfrac{1}{2} \times 101 \times 102 = 5\,151$
b. $T = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^8$
$= \dfrac{1 - 4^9}{1 - 4} = 87\,381$
c. $Z = 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^7$
$= \dfrac{1 - (-2)^8}{1 - (-2)} = -85$

52 **a.** (w_n) est arithmétique de raison $r = 2{,}4$;
donc $S = \dfrac{1}{2} \times 10 \times (w_0 + w_9)$,
soit $S = 5 \times (-3 - 3 + 2{,}4 \times 9) = 78$.
b. (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$;
donc $S = w_0 \times \dfrac{1 - 0{,}2^{10}}{1 - 0{,}2}$,
soit $S = \dfrac{5}{0{,}8} \times (1 - 0{,}2^{10}) = 6{,}249\,999\,36$.

Chapitre 3. Second degré

Les incontournables

37 **a.** $2{,}5(x + 3)^2 - 13{,}5 = 2{,}5x^2 + 15x + 9$
$= f(x)$

b.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Variations de f	↘	$-13{,}5$	↗

38 **a.** $h(t) = -t^2 + 2t + 3$
$-(t - 1)^2 + 4 = -t^2 + 2t + 3 = h(t)$

b.

t	0	1	3
Variations de h	3 ↗	4	↘ 0

39 **a.** $2x^2 + 12x - 6 = 2(x + 3)^2 - 24$
b. $-3x^2 + 6x + 9 = -3(x - 1)^2 + 12$

40 **a.** $f_1(x) = (x + 7)^2 - 6$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$	-7	$+\infty$
Variations de f_1	↘	-6	↗

b. $f_2(x) = (x - 6)^2 + 20$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$	6	∞
Variations de f_2	↘	20	↗

c. $f_3(x) = -(x + 3)^2 + 8$
Le coefficient de x^2 est négatif.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Variations de f_3	↗	8	↘

d. $f_4(x) = 4((x - 1)^2 - 1) = 4(x - 1)^2 - 4$.
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$	1	∞
Variations de f_4	↘	-4	↗

e. $f_5(x) = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{14}{3}$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$	$\dfrac{1}{3}$	$+\infty$
Variations de f_5	↘	$\dfrac{14}{3}$	↗

f. $f_6(x) = -5\left(x + \dfrac{1}{\blacksquare}\right)^2 + 1$
Le coefficient de x^2 est négatif.

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{3}$	$+\infty$
Variations de f_6	↗	1	↘

41 **a.** $a = 6$, $b = 7$ et $c = 2$. $\Delta = 1 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-7 - 1}{12} = \dfrac{-2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-7 + 1}{12} = \dfrac{-1}{2}$.
b. $a = -5$, $b = 10$ et $c = 1$. $\Delta = 120 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{30}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-10 + \sqrt{120}}{-10} = \dfrac{5 + \sqrt{30}}{5}$.
c. $4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
d. $a = -1$, $b = \sqrt{8}$ et $c = -19$. $\Delta = -68 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

42 **a.** On résout $-x^2 + 8x - 15 = 0$. $\Delta = 4 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-8 - 2}{-2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-8 + 2}{-2} = 3$.
$g(x) = 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2$
$g(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.
b. $f(x) = -(x - 3)(x - 5)$ et $g(x) = (4x - 1)^2$.

43 **a.** On résout $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$\Delta = 81 > 0$ donc $x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4$ et

$x_2 = \frac{-7+9}{4} = 0{,}5$.

$f_1(x) = 2(x - 0{,}5)(x + 4) = (2x - 1)(x + 4)$

b. On résout $108x^2 - 36x + 3 = 0$.

$\Delta = 0$ donc $x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$.

$f_2(x) = 108\left(x - \frac{1}{6}\right)^2$

c. On résout $-3x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = 25 > 0$ donc $x_1 = \frac{-1-5}{-6} = 1$ et

$x_2 = \frac{-1+5}{-6} = -\frac{2}{3}$.

$f_3(x) = -3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = -(x - 1)(3x + 2)$

d. $f_4(x) = 49x^2 + 28x + 4 = (7x + 2)^2$

$f_4(x) = 0 \Leftrightarrow (7x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{7}$.

$f_4(x) = (7x + 2)^2$

44 **a.** $x_1 = 1$ est une racine évidente de f.
Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{7}{1} = 7$. Donc $x_1 \times x_2 = 7$, soit $x_2 = 7$.
Ainsi $f(x) = (x - 1)(x - 7)$.

b. $x_1 = 2$ est une racine évidente de g. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{-10}{10} = -1$.

Donc $x_1 \times x_2 = -1$ soit $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ainsi $g(x) = 10(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

c. $x_1 = 2$ est une racine évidente de h. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{-12}{-1} = 12$.

Donc $x_1 \times x_2 = 12$ soit $x_2 = 6$.
Ainsi $h(x) = -(x - 2)(x - 6)$.

d. $x_1 = 1$ est une racine évidente de k. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{23}{-5}$.

Donc $x_1 \times x_2 = -\frac{23}{5}$ soit $x_2 = -\frac{23}{5}$.

Ainsi $k(x) = -5(x - 1)\left(x + \frac{23}{5}\right)$.

29

45 **a.**

x	$-\infty$		$-7-\sqrt{6}$		$-7+\sqrt{6}$		$+\infty$
Signe de $f_1(x)$		+	0	−	0	+	

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f_2(x)$		+	

c.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f_3(x)$		−	

d.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de $f_4(x)$		−	0	−	

46 **1. a.**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	0	−	

b.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$2{,}5$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	0	−	0	+	

2.a. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{1}{6}\right[\cup \left]4\,;+\infty\right[$

b. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{2}{7}\right] \cup [2{,}5\,;+\infty[$

c. $\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{6}\,;4\right[$

d. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{2}{7}\right[\cup \left]2{,}5\,;+\infty\right[$

47 **a.**

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-0{,}5$		$+\infty$
Signe de $6x^2+7x+2$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[\cup \left]-0{,}5\,;+\infty\right[$

b. $x_1 = \frac{5-\sqrt{30}}{5}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{30}}{5}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $-5x^2+10x+1$		−	0	+	0	−	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{5-\sqrt{30}}{5}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{30}}{5}\,;+\infty\right[$

c. $49x^2 + 28x + 4 = (7x + 2)^2$. C'est un carré, donc toujours positif. Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

d.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-2x^2+4x-4$		−	

Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

48 **a.** $7x^2 > 3x - 5 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x + 5 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $7x^2-3x+5$		+	

Ainsi $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

b. $-x^2 + x > 1 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-x^2+x-1$		−	

Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

c. $2x \leqslant 5x^2 + 4 \Leftrightarrow 5x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $5x^2-2x+4$		+	

Ainsi $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

d. $8x^2 - 10 \geqslant 7x^2 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 10$

$\Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{10}$ ou $x \geqslant \sqrt{10}$.

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty\,;-\sqrt{10}\,[\cup]\sqrt{10}\,;+\infty[$.

e. $\frac{4}{3}x^2 < \frac{2}{7}x + 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3 < 0$.

$\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3 = 0$

$x_1 = \frac{3-3\sqrt{197}}{28}$ et $x_2 = \frac{3+3\sqrt{197}}{28}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{7}x-3$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]\frac{3-3\sqrt{197}}{28}\,;\frac{3+3\sqrt{197}}{28}\right[$

f. $(2x - 3)(6x + 4) > x^2 - 6$

$\Leftrightarrow 11x^2 - 10x - 6 > 0$

$11x^2 - 10x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{5-\sqrt{91}}{11}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{91}}{11}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $11x^2-10x-6$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{5-\sqrt{91}}{11}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{91}}{11}\,;+\infty\right[$

49 **1.** $f(x) = 0{,}75x^2 + 9x + 24$

2. $(0{,}75x + 6)(x + 4) = 0{,}75x^2 + 3x + 6x + 24$
$= f(x)$

3. a. $f(0) = 0{,}75 \times 0^2 + 9 \times 0 + 24 = 24$

b. $f(-4) = [0{,}75 \times (-4) + 6](-4 + 4) = 0$

c. $f(x) = -3 \Leftrightarrow 0{,}75(x + 6)^2 - 3 = -3$
$\Leftrightarrow x = -6$

d. $f(x) < -3 \Leftrightarrow 0{,}75(x + 6)^2 - 3 < -3$
$\Leftrightarrow 0{,}75(x + 6)^2 < 0$
$\Leftrightarrow (x + 6)^2 < 0$

Un carré est toujours positif donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

50 **1.** $g(t) = 3t^2 + 10t - 8$

2. $(3t - 2)(t + 4) = 3t^2 + 12t - 2t - 8 = g(t)$

3. a. $g(3) = 49$; $g(0) = -8$.

b. $g(t) = -8 \Leftrightarrow 3t^2 + 10t - 8 = -8$
$\Leftrightarrow 3t^2 + 10t = 0 \Leftrightarrow t(3t + 10) = 0$
$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -\frac{10}{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{0\,;-\frac{10}{3}\right\}$

c. $g(t) = 0 \Leftrightarrow (3t - 2)(t + 4) = 0$
$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ ou $t = -4$.

t	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $3t^2+10t-8$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;-4[\cup \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

Les incontournables

31 a. $t(h) = \dfrac{-2(2+h)+3-(-2\times 2+3)}{h} = -2$.

$\lim\limits_{\to 0} t(h) = -2$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -2$.

b. $t(h) = \dfrac{2(-1+h)-5-(2\times(-1)-5)}{h} = 2$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 2$ donc g est dérivable en -1 et $g'(-1) = 2$.

c. $t(h) = \dfrac{2(2+h)^2-3-(2\times 2^2-3)}{h} = 8+2h$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 8$ donc k est dérivable en 2 et $k'(2) = 8$.

d. $t(h) = 13+2h$. $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 13$ donc l est dérivable en 2 et $l'(2) = 13$.

32 a. $t(h) = \dfrac{\sqrt{5+h-5}-\sqrt{5-5}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 5.

b. $t(h) = 2+3h$. $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 2$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 2$.

c. $t(h) = \dfrac{\sqrt{4(2+h)-2}-\sqrt{4\times 2-2}}{h}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{6+h}-\sqrt{6}}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ donc k est dérivable en 2 et $k'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

d. $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{h-1}-\dfrac{1}{0-1}}{h} = \dfrac{1}{h-1}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -1$ donc l est dérivable en 0 et $l'(0) = -1$.

33 a. La tangente à $\mathscr{P}$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-1) = 0$.

b. On étudie la dérivabilité de f en $a = -2$:

$t(h) = 2h-4$; $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -4$ donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -4$.

Ainsi $\mathscr{P}$ admet une tangente au point d'abscisse -2, qui a pour équation :

$$y = f(-2)+(-4)(x-(-2)),$$

soit $y = -4x-11$.

34 a. $t(h) = \dfrac{(2+h)^2+3(2+h)-1-(2^2+3\times 2-1)}{h}$

$= h+7$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 7$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = f(2)+f'(2)\times(x-2)$, soit $y = 7x-5$.

b. $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{3+h}-\dfrac{1}{3}}{h} = -\dfrac{1}{9+3h}$.

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -\dfrac{1}{9}$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = -\dfrac{1}{9}$. La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation : $y = f(3)+f'(3)\times(x-3)$, soit $y = -\dfrac{1}{9}x+\dfrac{2}{3}$.

35 a. $\mathscr{T}$ a pour équation $y = -2x+2$ donc $f'(1) = -2$.

b. $f'(a) = 0$ pour $a = 0$ et $a = 2$.

36 a. f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -18x^2$.

b. g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -8x$.

c. h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -6x+2$.

d. k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = -6x^2+14x-\dfrac{1}{3}$.

e. l dérivable sur $\mathbb{R}$ et $l'(x) = \dfrac{10x-2}{3}$.

37 a. f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{6x}{5}$.

b. g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -10x+7{,}2$.

c. h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 16x+\dfrac{5}{7}$.

d. $k(x) = 9x^2-42x+49$.

k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = 18x-42$.

e. $l(x) = 5^2-(3x)^2 = 25-9x^2$.

l dérivable sur $\mathbb{R}$ et $l'(x) = -18x$.

38 a. $f = u\times v$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x^2-1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3$, $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = 3(x^2-1)+2x\times 3x = 9x^2-3$.

b. $g = u\times v$ avec $u(x) = -2x+3$ et $v(x) = 3x-5$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2$, $v'(x) = 3$.

$g'(x) = -2(3x-5)+3(-2x+3) = -12x+19$.

c. $h = u\times v$ avec $u(x) = -5x^2+1$ et $v(x) = 2x^2+3x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -10x$, $v'(x) = 4x+3$.

$h'(x) = -40x^3-45x^2+4x+3$.

d. $k = u\times v$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 3x-5$. k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $v'(x) = 3$.

$k'(x) = -\dfrac{1}{x^2}(3x-5)+3\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{x^2}$.

39 a. $f = u\times v$ avec $u(x) = 5\sqrt{x}$ et $v(x) = 3x+1$.

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $u'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 3$.

$f'(x) = \dfrac{45}{2}\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

b. $g = u\times v$ avec $u(x) = 10x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $u'(x) = 10$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$g'(x) = 10\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times 10x = 15\sqrt{x}$.

c. $h = u\times v$ avec $u(x) = 3\sqrt{x}-1$ et $v(x) = 2x+1$. h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$u'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 2$.

$h'(x) = 12\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-3$.

d. $k = u^2$ avec $u(x) = 5x+1$. k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 5$.

$k'(x) = 2\times 5(5x+1) = 10(5x+1)$.

40 a. $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = -2x+4$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $v'(x) = -2$.

Donc $f'(x) = -\dfrac{-2}{(-2x+4)^2} = \dfrac{2}{(-2x+4)^2}$.

b. $g = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x-1$ et $v(x) = 2x+6$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.

$g'(x) = \dfrac{3(2x+6)-2(3x-1)}{(2x+6)^2} = \dfrac{20}{(2x+6)^2}$.

c. $h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x^2+1$.

$v(x) = 0$ n'a pas de solution donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$. $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$.

$h'(x) = \dfrac{3(x^2+1)-2x(3x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

d. $k = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x+6$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6$ donc k est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-6\}$. $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$.

$k'(x) = \dfrac{3x^2(x+6)-x^3}{(x+6)^2} = \dfrac{2x^3+18x^2}{(x+6)^2}$.

41 a. $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2$. $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2)^2} = -\dfrac{2}{x^3}$.

b. $g = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = -3x+1$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{■}\right\}$. $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -3$.

$g'(x) = \dfrac{2(-3x+1)-(-3)(2x)}{(-3x+1)^2} = \dfrac{2}{(-3x+1)^2}$.

c. $h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -2x+1$ et $v(x) = x^2+5x-1$.

L'équation $v(x) = 0$ admet deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$.

Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{x_1\,;x_2\}$. $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 2x+5$.

$h'(x) = \dfrac{2x^2-2x-3}{(x^2+1)^2}$.

d. $k = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. $u'(x) = 0$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$k'(x) = \frac{0\times\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times 3}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Chapitre 5. Dérivation : applications

Les incontournables

23 **a.**

x	-4		-2		2		4
Variations de f		↗		↘		↗	

b.

x	-4		-2		2		4
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	

24

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		−	0	+	

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

25 **a.**

x	-1		0		3		4
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	

b.

x	-1		0		3		4
Variations de f	$-\frac{11}{6}$	↗	0	↘	$-4{,}5$	↗	$-\frac{8}{3}$

26 **a.** $f'(x) = -8x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f		↗	$-10{,}94$	↘	

b. $g'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4)$

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de x		−	0	+		+	
Signe de $(-3x + 4)$		+		+	0	−	
Signe de $g'(x)$		−	0	+	0	−	
Variations de g		↘	-7	↗	-4	↘	

c. $h'(x) = -18x^2 + 22x - 3$

$\Delta = 268$; $x_1 = \frac{11 - \sqrt{67}}{18}$ et $x_2 = \frac{11 + \sqrt{67}}{18}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		−	0	+	0	−	
Variations de h		↘	$h(x_1)$	↗	$h(x_2)$	↘	

d. $k'(x) = -12x + 30$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $k'(x)$		+	0	−	
Variations de k		↗	$62{,}5$	↘	

e. $l'(x) = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de $l'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de l		↗	38	↘	2	↗	

27 **a.** $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x + 1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	
Variations de f		↘	$-0{,}5$	↗	$0{,}5$	↘	

b. $g'(x) = \frac{7}{x^2}$

x	0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	+	
Variations de g	‖	↗	

c. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

x	0		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	‖	+	
Variations de h	‖	↗	

d. $k'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $k'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
Variations de k		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

28 **a.** Oui : maximum en $x = 2$ car la dérivée, positive puis négative, s'annule en $x = 2$ en changeant de signe.

b. Non car la dérivée est toujours positive sur I.

c. Oui : maximum en $x = 0$ car la dérivée, positive puis négative, s'annule en $x = 0$ en changeant de signe.

d. Oui : minimum en $x = -2$ car la dérivée, négative puis positive, s'annule en $x = -2$ en changeant de signe.

29 $B'(x) = -2x + 10$

x	0		5		10
Signe de $B'(x)$		+	0	−	
Variations de B		↗	16	↘	

Nombre de clés USB à produire mensuellement pour obtenir un bénéfice maximal : 5 000.
Bénéfice mensuel maximal : 16 000 €.

30 On pose ME $= x$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme ENZO.
$\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 6x + 8$ et $\mathscr{A}'(x) = 4x - 6$.

x	0		$\frac{3}{2}$		4
Signe de $\mathscr{A}'(x)$		−	0	+	
Variations de $\mathscr{A}$		↘	$3{,}5$	↗	

Il existe une position du point E pour laquelle $\mathscr{A}$ est minimale : ME = 1,5.

et

Chapitre 6. Fonction exponentielle

Les incontournables

a. $f'(x) = (3 + 3x)e^x$

b. $g'(x) = \dfrac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}$

c. $h'(x) = e^x\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

d. $k'(x) = (3x^2 + x + 3)e^x$

38 **1.** c **2.** b **3.** d **4.** a

39 **a.** e^{9x} **b.** $e^{x+2} + 1$
c. $e^{3x} - e^{2x}$ **d.** $1 - e^{x+10}$

40 **a.** $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ **b.** $\mathscr{S} = \varnothing$
c. $\mathscr{S} = \{-3 ; 3\}$
d. $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{7}{4}\right\}$ **e.** $\mathscr{S} = \{-1 ; 3\}$
f. $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

41 **a.** $\mathscr{S} =]0 ; +\infty[$ **b.** $\mathscr{S} =]-\infty ; 3]$
c. $\mathscr{S} =]-\infty ; -2[$ **d.** $\mathscr{S} = [2 ; +\infty[$
e. $\mathscr{S} =]-3 ; 2[$ **f.** $\mathscr{S} = \left[\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$

42 **a.** $f'(x) = -5e^{-5x+3}$.
f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
b. $g'(x) = \dfrac{(6x-13)e^{2x+1}}{(3x-5)^2}$.
g est décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{5}{3}\right[$ et sur $\left]\dfrac{5}{3} ; \dfrac{13}{6}\right]$,
et croissante sur $\left[\dfrac{13}{6} ; +\infty\right[$.
c. $h'(x) = (-6x + 13)e^{3x}$.
h est croissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{13}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{13}{6} ; +\infty\right[$.
d. $k'(x) = \dfrac{(-x^2 - x + 3)e^{-x+2}}{(x^2 - x - 2)^2}$
k est décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{-\sqrt{13}-1}{2}\right]$,
croissante sur $\left[\dfrac{-\sqrt{13}-1}{2} ; -1\right[$,
croissante sur $\left]-1 ; \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$,
décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} ; 2\right[$
et décroissante sur $]-2 ; +\infty[$.

43 $f : \mathscr{C}_4$ (orange) ; $g : \mathscr{C}_2$ (rouge) ;
$h : \mathscr{C}_1$ (verte) ; $k : \mathscr{C}_3$ (bleue).

44 **a.** … décroissante … $(0 ; 1)$ et $(1 ; e^{-5})$.
b. … croissante … $\left(0 ; \dfrac{3}{e^4}\right)$ et $(1 ; 3e)$.
c. … décroissante … $\left(0 ; -\dfrac{3}{e}\right)$ et $(1 ; -3e)$.

45 **a.** croissance exponentielle
b. décroissance exponentielle
c. croissance exponentielle
d. décroissance exponentielle

46 **a.** $3e^{0,69t}$ **b.** $0,2e^{1,1t}$
c. $(-4)e^{0,26t}$ **d.** $5e^{-0,22t}$

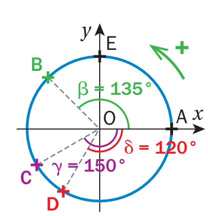
Chapitre 7. Fonctions trigonométriques

Les incontournables

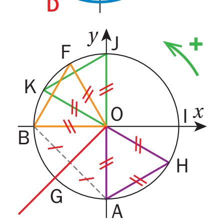
35 **1. a.** $L \approx 2,4$ cm **b.** $L \approx 6,3$ cm
2. a. $L \approx 1$ cm **b.** $L \approx 4,7$ cm

36 **a.** $M\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ **b.** $N\left(\dfrac{10\pi}{9}\right)$ **c.** $P\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

37
$$\frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 2\pi - \frac{5\pi}{6}$$



38 OKJ, OFB et OHA sont des triangles équilatéraux.
[OG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OBA}$.



39 **a.** $-\frac{13\pi}{3} = -4\pi - \frac{\pi}{3}$.

Donc le point M est associé au réel $-\frac{\pi}{3}$.

b. Sur $[0\ ;\ 2\pi]$, M est associé au réel $\frac{5\pi}{3}$.

40 **a.** Oui, car $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$.

b. Non, car $\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$.

c. Oui, car $\frac{19\pi}{10} = \frac{20\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = 2\pi - \frac{\pi}{10}$.

d. Non, car $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 4\pi - \frac{5\pi}{6}$

et $-\frac{5\pi}{6} \neq -\frac{7\pi}{6}$.

e. Non, car $\frac{18\pi}{5} = \frac{20\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}$

et $-\frac{2\pi}{5} \neq -\frac{6\pi}{5}$.

f. Non, car $\frac{25\pi}{2} = \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 12\pi + \frac{\pi}{2}$

et $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$.

41 **a.** $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos(-\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = 0$.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

42 **a.** $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}59$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}81$.

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}95$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}97$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}26$.

$\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) \approx 0{,}9$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) \approx -0{,}43$.

b. $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 0{,}17$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 0{,}98$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \approx 0{,}14$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \approx 0{,}99$.

$\cos\left(\frac{13\pi}{7}\right) \approx 0{,}9$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right) \approx -0{,}43$.

$\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \approx -0{,}95$.

43 **a.** … l'axe des ordonnées.

b. … l'origine du repère.

44 **a.** Vrai, car elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Faux, car elle est croissante sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\pi\right]$.

c. Vrai : ce minimum unique sur $[0\ ;\ 2\pi]$ est égal à -1 en $x = \pi$.

d. Faux, car elle est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$.

e. Faux, car sur $[0\ ;\ 3\pi]$, il existe deux maxima égaux à 1 en $x = \frac{\pi}{2}$ et en $x = \frac{5\pi}{2}$.

f. Vrai.

Chapitre 8. Produit scalaire

Les incontournables

34 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \cos(30) = 10\sqrt{3}$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 5$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times DC = 4 \times 5 = 20$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 6 \times \cos(60) = 12$.

e. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 3^2) = 1$.

35 **a.** $-2\vec{u}\cdot(3\vec{u} + \vec{v}) = -6\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$= -6 \times 5^2 - 2 \times 8 = -166$

b. $(2\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v})$

$= -8\vec{u}^2 + 14\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{v}^2 = -115$

c. $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| = \sqrt{\vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2} = \sqrt{50}$

d. $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2} = \sqrt{18}$

36 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 \times (-1) + 2 \times 0 = 1$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

37 **a.** $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$.

b. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$, donc

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -6 \times (-3) + 2 \times (-9) = 0$.

c. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

38 Avec le théorème de Pythagore dans ABD, $BD^2 = 3^2 + 4{,}5^2 = 29{,}25$.

On note C' le projeté orthogonal de C sur (AB), C'B = 2,5 et avec le théorème de Pythagore dans C'BC, $BC^2 = 3^2 + 2{,}5^2 = 15{,}25$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

$= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

$= -(BA^2 + BD^2 - AD^2) + (BC^2 + BD^2 - CD^2)$

$= -(20{,}25 + 29{,}25 - 9) + (15{,}25 + 29{,}25 - 4)$

$= 0$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux, donc les diagonales sont bien perpendiculaires.

39 **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4 \times (-6) + 4 \times (-2) = 16$.

b. $AB = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ et $AC = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{16}{\sqrt{32}\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

c. $\widehat{BAC} \approx 63°$.

40 **a.** $x = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos(45)$

$= 41 - 20\sqrt{2}$

b. $x = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(30)$

$= 13 - 6\sqrt{3}$

c. $x = 4^2 + 5{,}5^2 - 2 \times 4 \times 5{,}5 \times \cos(60)$

$= 24{,}25$

41 **a.** $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{C})$,

donc $\cos(\widehat{C}) = \frac{3^2 - 4{,}3^2 - 6{,}7^2}{-2 \times 4{,}3 \times 6{,}7}$, $\widehat{C} \approx 19{,}3°$.

On trouve de même $\widehat{B} \approx 28{,}3°$ et donc $\widehat{A} = 180 - \widehat{B} - \widehat{C} \approx 132{,}4°$.

b. $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 - \frac{BC^2}{2}$, d'où $AI^2 = 2{,}5225$

et donc $AI = \sqrt{2{,}5225}$.

42 **1. a.** On cherche P appartenant à la demi-droite [AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = 20$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = AB \times AP = 20$ et donc $AP = \frac{10}{3}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 20 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par P.

b. On cherche Q appartenant à la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} = -10$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} = -AB \times AQ = -10$

et donc $AQ = \frac{5}{3}$.

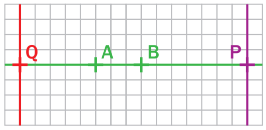
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -10 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AQ}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QM} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par Q.

2.



43 **a.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(60)$

$= 49$, donc $BC = 7$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60) = 20$.

b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$

$= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 = -84$

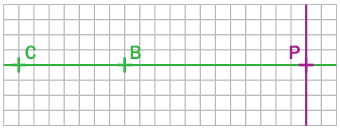
c. On cherche P appartenant à la droite (BC) tel que $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC} = -84$, et donc $-BP \times BC = -84$ et donc $BP = 12$.

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} = -84 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BP}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (BC) et passant par P.



Les incontournables

36 **a.** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0+2\\1-4\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d). $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

d. $y = \frac{5}{4}x + 2 \Leftrightarrow 5x - 4y + 8 = 0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

37 $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $3x - 4y + 1 = 0$, c'est donc un vecteur normal à la droite (d) cherchée.
Une équation de (d) est : $4x + 3y + c = 0$ avec c un nombre réel. K $\in (d)$ donc :
$4 \times 2 + 3 \times (-5) + c = 0 \Leftrightarrow c = 7$.
Une équation de (d) est $4x + 3y + 7 = 0$.

38 **1. a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice (m) de [AB] donc une équation de (m) est $3x - 2y + c = 0$.
Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};2\right)$, donc
$\frac{3}{2} - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$.
Une équation de (m) est :
$$3x - 2y + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6x - 4y + 5 = 0.$$
b. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice (m') de [AC] donc une équation de (m') est $-x - y + e = 0$.
Le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{-3}{2};\frac{5}{2}\right)$,
donc $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} + e = 0 \Leftrightarrow e = 1$.
Une équation de (m') est $-x - y + 1 = 0$.
2. Les coordonnées du centre du cercle circonscrit vérifient le système :
$$\begin{cases}6x - 4y + 5 = 0\\-x - y + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = \frac{11}{10}\\x = \frac{-1}{10}\end{cases}.$$
Le centre du cercle circonscrit à ABC a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{10};\frac{11}{10}\right)$.

39 Une équation de la droite perpendiculaire à (d) passant par A est $-3x + y + c = 0$ avec c un nombre réel.
$-3 \times 1 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.
Donc les coordonnées du projeté orthogonal vérifient le système :
$$\begin{cases}x + 3y - 7 = 0\\-3x + y - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2{,}2\\x = 0{,}4\end{cases}.$$
Le projeté a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)$.

40 **a.** La droite (DE) admet $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ou $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Une équation de (DE) est $x + y + c = 0$.
D est sur cette droite, donc :
$-1 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$.
(DE) : $x + y - 3 = 0$
La droite perpendiculaire à (DE) passant par F admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation de cette droite est $-x + y + e = 0$ avec e un nombre réel.
$-(-2) + 1 + e = 0 \Leftrightarrow e = -3$
Son équation est donc $-x + y - 3 = 0$.
Les coordonnées de H vérifient le système :
$$\begin{cases}x + y - 3 = 0\\-x + y - 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 3\\x = 0\end{cases}.$$
Donc H(0 ; 3).
b. $\text{FH}^2 = 4 + 4 = 8$ donc $\text{FH} = 2\sqrt{2}$.
c. $\text{DE}^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ donc $\text{DE} = 3\sqrt{2}$.
$$\mathcal{A}_{\text{DEF}} = \frac{\text{DE} \times \text{FH}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 6.$$

41 **a.** $(x-1)^2 + (y+7)^2 = 25$
b. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$
c. $(x-3)(x+8) + (y-5)(y-6) = 0$

42 **a.** $\text{DE}^2 = 15^2 + 9^2 = 306$;
$\text{EF}^2 = 3^2 + 5^2 = 34$; $\text{FD}^2 = 12^2 + 14^2 = 340$.
$\text{DE}^2 + \text{EF}^2 = \text{FD}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, EFD est rectangle en E.
b. Le cercle circonscrit à DEF a pour diamètre [FD].
Une équation de ce cercle est :
$(x-6)(x+6) + (y+6)(y-8) = 0$.

43 Une équation de la médiatrice de [GH] est $x = 1$. Une équation de la médiatrice de [GI] est $x - y + 1 = 0$.
Les coordonnées du centre C du cercle circonscrit vérifient :
$$\begin{cases}x = 1\\x - y + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\y = 2\end{cases}.$$
Donc C(1 ; 2).
Le rayon du cercle est CI avec $\text{CI}^2 = 1^2 + 4^2 = 17$.
Une équation du cercle est donc :
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17.$$

44 **a.** Cercle de centre O(5 ; –2) et de rayon 4.
b. Cercle de centre O(–3 ; 1) et de rayon 1.
c. Cercle de centre O(1 ; 0) et de rayon 5.
d. Cercle de centre O(0 ; –2) et de rayon $\sqrt{3}$.
e. Cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
f. $4x^2 + 4(y-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{4}$.
Cercle de centre O(0 ; 2) et de rayon $\frac{3}{2}$.

45 **a.** $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$
Cercle de centre O(–2 ; 3) et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
b. $x^2 + 5x + y^2 - 10y = -8$
$\Leftrightarrow (x+2{,}5)^2 + (y-5)^2 = 23{,}25$
Cercle de centre O(–2,5 ; 5) et de rayon $\sqrt{23{,}25}$.
c. $x^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.
Ce n'est pas un cercle.
d. $x^2 - x + y^2 + 2y + 3 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = -\frac{7}{4} < 0$
Ce n'est pas un cercle.
e. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$
Cercle de centre O(–4 ; –3) et de rayon 5.
f. $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$
Ce n'est pas un cercle : c'est le point de coordonnées (–1 ; 2).

46 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 - m^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + 6 - m^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m^2 - 4$
Cette équation est celle d'un cercle
$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+2) > 0$
$\Leftrightarrow m \,]-\infty\,;-2[\, \cup \,]2\,;+\infty[$

47 **a.** $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.
b. Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (–5 ; –1).
c. La parabole passe par les points A(2 ; 0) et B(–4 ; 0) donc l'abscisse de son sommet est égal à $\frac{2+(-4)}{2} = -1$ et $(-1-2)(-1+4) = -9$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (–1 ; –9).
d. $y = -2x(x-1) - 7 = -2x^2 + 2x - 7$
$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ et $-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} - 7 = \frac{-13}{2}$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{-13}{2}\right)$.

48 **a.** $\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 0.5} = -3$. Oui, la droite d'équation $x = -3$ est axe de symétrie de la parabole.
b. Le sommet a pour coordonnées (3 ; 4). Non : c'est la droite d'équation $x = 3$ qui est l'axe de symétrie.
c. $y = x^2 - 2x - 6$ donc $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.
Non : c'est la droite d'équation $x = 1$ qui est l'axe de symétrie.
d. Le sommet a pour coordonnées (–1 ; –3). Non : c'est la droite d'équation $x = -1$ qui est l'axe de symétrie.

= 1 – P(« aucun client n'a obtenu un bon de réduction »)

1 4 5

Chapitre 10. Probabilités conditionnelles

Les incontournables

29 **1. a.** P(A ∩ B) = 0,25 + 0,35 – 0,4 = 0,2

b.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,2	0,15	0,35
$\overline{B}$	0,05	0,6	0,65
Total	0,25	0,75	1

2. a. $P_A(B) = \dfrac{0,2}{0,25} = 0,8$; $P_B(A) = \dfrac{0,2}{0,35} = \dfrac{4}{7}$;

$P_A(\overline{B}) = \dfrac{0,05}{0,25} = 0,2$; $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{0,05}{0,65} = \dfrac{1}{13}$.

b. La probabilité de B sachant que A est réalisé vaut 0,8 ; la probabilité de A sachant que B est réalisé vaut $\frac{4}{7}$; la probabilité de $\overline{B}$ sachant que A est réalisé vaut 0,2 et la probabilité de A sachant que $\overline{B}$ est réalisé vaut $\frac{1}{13}$.

30 **1.**

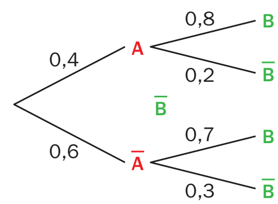
	Maths	SVT	Total
Manuel scolaire	35	30	65
Annales	15	10	25
Total	50	40	90

2. a. P(« manuel scolaire de maths ») $= \dfrac{35}{90} = \dfrac{7}{18}$.

b. $P_{\text{« manuel scolaire »}}(\text{« Maths »}) = \dfrac{35}{65} = \dfrac{7}{13}$.

c. $P_{\text{« SVT »}}(\text{« Annales »}) = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$.

31 **a.**

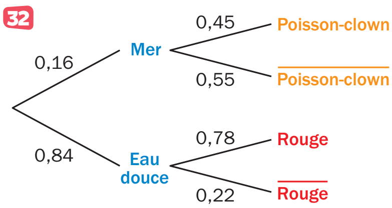


b. $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,3$.

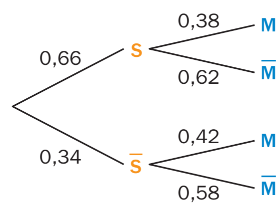
c. $P(\overline{A} \cap B) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$ et

$P(A \cap \overline{B}) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.

32



33 **a.**



b. P(S ∩ M) = 0,38 × 0,66 = 0,2508 et

$P(\overline{S} \cap M) = 0,42 \times 0,34 = 0,1428$.

c. S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers ; on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$P(M) = P(M \cap S) + P(M \cap \overline{S})$

= 0,2508 + 0,1428 = 0,3936.

$P_M(S) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(M)} = \dfrac{0,2508}{0,3936}$

$= \dfrac{209}{328} \approx 0,637$.

d. P(M) est la probabilité que la guirlande choisie ait l'option minuteur ; $P_M(S)$ est la probabilité que la guirlande choisie fonctionne sur secteur sachant qu'elle possède l'option minuteur.

34 **a.** P(A) × P(B) = 0,21 × 0,79

= 0,1659 ≠ 0,17 = P(A ∩ B)

donc A et B ne sont pas indépendants.

b. P(A) × P(B) = 0,2 × 0,8 = 0,16.

P(A ∩ B) = P(A) + P(B) – P(A ∪ B)

= 0,2 + 0,8 – 0,84 = 0,16 = P(A) × P(B)

donc A et B sont indépendants.

c. $P_A(B) = 0,1539 \neq P(B) = 0,81$

donc A et B ne sont pas indépendants.

35 A et B sont indépendants donc :

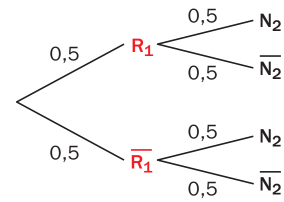
$P(B) = P_A(B) = 0,48$ et $P_B(A) = P(A) = 0,18$.

P(A ∩ B) = 0,18 × 0,48 = 0,0864.

P(A ∪ B) = 0,18 + 0,48 – 0,0864 = 0,5736.

36 **1. a.** Comme on remet la carte dans le jeu entre les deux épreuves, celles-ci sont indépendantes.

b.



2. a. P(« deux cartes noires »)

$= P(\overline{R_1} \cap N_2) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

b. P(« au plus une carte rouge »)

= 1 – P(« deux cartes rouges »)

= 1 – 0,25 = 0,75.

Chapitre 11. Variables aléatoires

Les incontournables

25 **a.** $0,20 + 2p + 3p + 0,09 + 0,16 + 0,30 = 1$, donc $5p = 0,25$, soit $p = 0,05$.

b. $P(X \geqslant 3) = 0,16 + 0,30 = 0,46$.

$P(X < 1) = 0,20 + 0,10 = 0,30$.

$P(1 < X < 4) = 0,09 + 0,16 = 0,25$.

26 **a.**

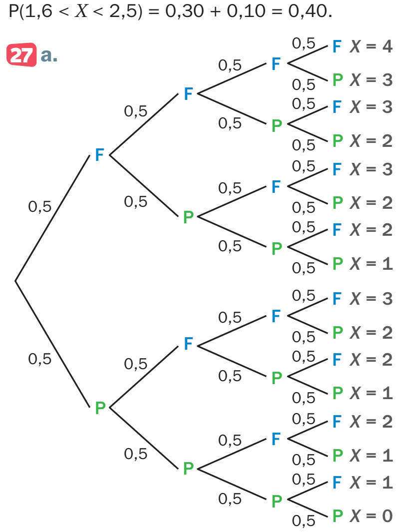
x_i	0,8	1,2	1,8	2,2	2,8
$P(X = x_i)$	0,15	0,25	0,30	0,10	0,20

b. $P(X < 2) = 0,15 + 0,25 + 0,30 = 0,70$.

$P(X > 2,8) = 0$.

$P(1,6 < X < 2,5) = 0,30 + 0,10 = 0,40$.

27 **a.**



x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

b. $P(X < 2) = 0,0625 + 0,25 = 0,3125$.

c. $P(X \geqslant 3) = 0,25 + 0,0625 = 0,3125$.

d. $P(X \leqslant 1) = 0,0625 + 0,25 = 0,3125$.

28 **a.**

```python
import random
def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.16:
        return -5
    if alea<0.43:
        return 0
    if alea>=0.77:
        return 10
    else:
        return 15
```

b.

```python
import random
import math

def moy(n):
    mu=0
    for simu in range(n):
        mu=mu+simu_X()
        return mu/n
```

c.

```python
def e_type(n):
    mu=moy(n)
    s=0
    for simu in range(n):
        s=s+(simu_X()-mu)**2
    return math.sqrt(s/n)
```

29 **1.** $E(X) = 4{,}08$ et $\sigma(X) \approx 1{,}72$.

2. a.

y_j	5	6	7	8	9	10
$P(Y = y_j)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

$E(Y) = E(X) + 4 = 8{,}08$.

$\sigma(Y) = \sigma(X) \approx 1{,}72$.

b.

z_j	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8
$P(Z = z_j)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

$E(Z) = 2{,}3 \times E(X) = 9{,}384$.

$\sigma(Z) = 2{,}3 \times \sigma(X) \approx 3{,}956$.

c.

t_j	0	-1	-2	-3	-4	-5
$P(T = t_j)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

$E(T) = -E(X) + 1 = -3{,}08$.

$\sigma(T) = |-1|\sigma(X) \approx 1{,}72$.

30 **a.**

x_i	0	5	50	100
$P(X = x_i)$	$\frac{283}{300}$	$\frac{1}{30}$	0,02	$\frac{1}{300}$

y_i	0	5	25	50
$P(Y = y_i)$	$\frac{127}{150}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{75}$

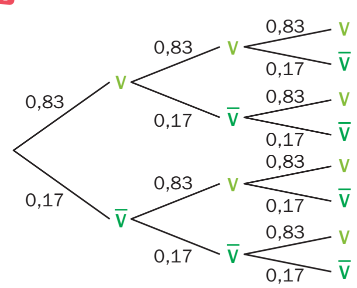
b. $E(X) = 1{,}5$ et $E(Y) = 1{,}5$.

c. $V(X) = \frac{983}{12}$ et $\sigma(X) \approx 9{,}05$.

$V(Y) = \frac{463}{12}$ et $\sigma(Y) \approx 6{,}21$.

d. Les tombolas ont des gains moyens identiques (espérances égales), mais les gains sont plus dispersés pour la tombola de Noël (qui a un écart type de gain plus élevé).

31 **a.**



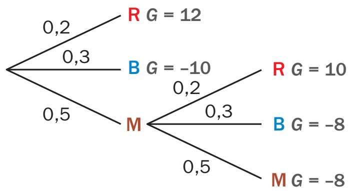
b. $P(X = 0) = 0{,}17^3$.

$P(X = 1) = 3 \times 0{,}83 \times 0{,}17^2$.

$P(X = 2) = 3 \times 0{,}83^2 \times 0{,}17$.

$P(X = 3) = 0{,}83^3$.

32 **a.**



Les valeurs prises par G sont :

$\{-8 ; -10 ; 10 ; 12\}$.

b. $P(G = -10) = 0{,}3$.

$P(G = -8) = 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}4$.

$P(G = 10) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$.

$P(G = 12) = 0{,}2$.

Corrigé du livret de liaison 1ère $\longrightarrow$ Tle - Mathématiques

Exercice 1 **Savoir résoudre une équation du second degré ou s'y ramenant**

1. Niveau 1

a) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 1 = 0$ est une équation de degré 2 (car forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 8, b = -2, c = -1$) de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 8 \times (-1) = 36$

$\Delta > 0$, donc **l'équation admet deux solutions réelles distinctes :**

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{36}}{2\times 8} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{36}}{2\times 8} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \boxed{\mathbf{S} = \left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} ; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right\}}$$

b) $5x^2 + x + 4 = 0$ est une équation de degré 2 de $\Delta = 1^2 - 4 \times 5 \times 4 = -79$

$\Delta < 0$, donc **l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.** $\boxed{\mathbf{S} = \emptyset}$

c) $3x^2 - 4x - 1 = 2x - 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$ est une équation de degré 2 de $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$

$\Delta = 0$, donc **l'équation admet une solution (double) réelle :** $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \mathbf{1}$ $\boxed{\mathbf{S} = \{\mathbf{1}\}}$

Remarque On pouvait aussi remarquer que le calcul de Δ n'était pas nécessaire ici :

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

2. Niveau 2

a) $\frac{-x^2 + 2x + 8}{2x + 4} = 0$ ***équation « quotient nul » :*** $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$ <u>et</u> $\mathrm{B} \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $-x^2 + 2x + 8 = 0$ <u>et</u> $2x + 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 4$ <u>ou</u> $x = -2$ <u>et</u> $x \neq -2$

$-x^2 + 2x + 8 = 0$ est une équation de degré 2
de $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$
$\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times(-1)} = 4$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2\times(-1)} = -2$

Finalement, **l'équation** $\frac{-\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{8}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}} = \mathbf{0}$ **admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: 4.**

b) Pour tout réel x, $(x^2 - 5)(3x^2 + x - 1) = 3x^4 + x^3 - x^2 - 15x^2 - 5x + 5 = 3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5$.

Par suite, $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 - 5)(3x^2 + x - 1) = 0$ ***équation « produit nul » :*** $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 0$ <u>ou</u> $\mathrm{B} = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5 = 0$ <u>ou</u> $3x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = -\sqrt{5}$ <u>ou</u> $x = \sqrt{5}$ <u>ou</u> $x = x_1$ <u>ou</u> $x = x_2$

$3x^2 + x - 1 = 0$ est une équation de degré 2
de $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 13$
$\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2\times3} = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2\times3} = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$

Finalement, **l'équation $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$ a pour ensemble solution :**

$$\mathbf{S} = \left\{-\sqrt{5} ; \sqrt{5} ; \frac{-1-\sqrt{13}}{6} ; \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right\}$$

Exercice 2 **Résoudre un problème de degré 2**

Soit n un entier quelconque. $n-1$, n et $n+1$ sont alors trois entiers consécutifs.
Savoir que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1 877 équivaut à :

$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 1\,877$ soit $n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 1\,877$

$\iff 3n^2 = 1\,875$

$\iff n^2 = 625$

$\iff n = -25$ ou $n = 25$

Les trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 1 877 sont : -26 , -25 , -24 ou 24 , 25 , 26.

Remarque En considérant les entiers consécutifs $n, n+1$ et $n+2$, on obtient l'équation :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 1\,877 \iff n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 1\,877$$

$$\iff 3n^2 + 6n - 1\,872 = 0$$

Cette dernière équation est de degré 2, son discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-1\,872) = 22\,500$
$\Delta > 0$, donc **l'équation admet deux solutions réelles distinctes :**

$$n_1 = \frac{-6-\sqrt{22\,500}}{2\times 3} = \mathbf{-26} \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{-6+\sqrt{22\,500}}{2\times 3} = \mathbf{24}$$

On retrouve les deux triplets -26 , -25 , -24 ou 24 , 25 , 26.

Exercice 3 **Savoir déterminer le signe d'un polynôme de degré 2**

1. $f(x) = x^2 - 7x + 10$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$

$\Delta > 0$, donc $f(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{9}}{2\times 1} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{9}}{2\times 1} = 5$.

$f(x)$ est donc du signe de 1 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines 2 et 5.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

2. $f(x) = -6x^2 + x - 1$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) \times (-1) = -23$

$\Delta < 0$, donc $f(x)$ n'admet pas de racine réelle.

$f(x)$ est donc du signe de -6 (coefficient de x^2), autrement dit, **$f(x)$ est strictement négatif sur** $\mathbb{R}$

Exercice 4 **Savoir étudier la position relative de deux courbes**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = x + 4$.

$f(x) - g(x) = -2x^2 + 4x + 3 - (x+4) = -2x^2 + 3x - 1$

$-2x^2 + 3x - 1$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1$

$\Delta > 0$, donc $f(x) - g(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2\times(-2)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2\times(-2)} = 0{,}5$.

$f(x) - g(x)$ est donc du signe de -2 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines 0,5 et 1.

x	$-\infty$		0,5		1		$+\infty$
signe de $f(x)-g(x)$		−	0	+	0	−	

CONCLUSION

- **Sur $]-\infty\,;\,0{,}5[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$**, $f(x) - g(x) < 0$ soit $f(x) < g(x)$ et donc **C_f est strictement en dessous de C_g** ;
- **sur $]0{,}5\,;\,1[$**, $f(x) - g(x) > 0$ soit $f(x) > g(x)$ et donc **C_f est strictement au-dessus de C_g** ;
- **sur $\{0{,}5\,;\,1\}$**, $f(x) - g(x) = 0$ soit $f(x) = g(x)$ et donc **C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses 0,5 et 1.**

Exercice 5 **Savoir dériver une fonction et étudier ses variations**

METHODE : Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.

1. $\boldsymbol{f}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7}$

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 4x + 5}$
- $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times 5 = -104$

  $\Delta < 0$, donc $f'(x)$ n'admet pas de racine réelle et est du signe de 6 (coefficient de x^2) sur $\mathbb{R}$.

  Finalement, $\boldsymbol{f'(x)}$ **est strictement positif sur** $\mathbb{R}$ et donc $\boldsymbol{f}$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

2. $\boldsymbol{f}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $\boldsymbol{f(x) = (x^2 + 1)(6x^2 - 10)}$

- $f(x) = u(x)v(x)$ donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 & \text{et} \quad u'(x) = 2x \\ v(x) = 6x^2 - 10 & \text{et} \quad v'(x) = 12x \end{cases}$

  Ainsi, pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)} = 2x(6x^2 - 10) + (x^2 + 1)12x = 24x^3 - 8x = \boldsymbol{8x(3x^2 - 1)}$

  $= \boldsymbol{8x(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)}$

- **Tableau de variation de** $\boldsymbol{f}$ **sur** $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
signe de $8x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $3x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		↘	$-\frac{32}{3}$	↗	-10	↘	$-\frac{32}{3}$	↗	

$3x^2 - 1$ est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$3x^2 - 1$ est donc du signe de 3 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(6 \times \frac{1}{3} - 10\right) = \frac{4}{3} \times (-8) = -\frac{32}{3} \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \times (-10) = -10$$

3. $\boldsymbol{f}$ **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $\boldsymbol{f(x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + 1}}$

- $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ donc $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x + 1 & \text{et} \quad u'(x) = 4 \\ v(x) = 2x^2 + 1 & \text{et} \quad v'(x) = 4x \end{cases}$

  Par suite, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{4(2x^2 + 1) - (4x + 1)4x}{(2x^2 + 1)^2} = \boldsymbol{\frac{-8x^2 - 4x + 4}{(2x^2 + 1)^2}}$

- **Pour tout réel** $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{(2x^2 + 1)^2 > 0}$ **et donc** $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{-8x^2 - 4x + 4}$.

  Or, $-8x^2 - 4x + 4$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-8) \times 4 = 144$

  $\Delta > 0$, donc $-8x^2 - 4x + 4$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{4 - \sqrt{144}}{2 \times (-8)} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{144}}{2 \times (-8)} = -1$

  $-8x^2 - 4x + 4$ est donc du signe de -8 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines -1 et $\frac{1}{2}$.

  Tableau de variation de $\boldsymbol{f}$ **sur** $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f		↘	-1	↗	2	↘	

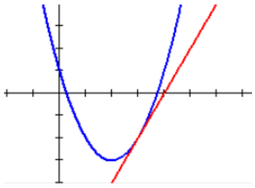
Exercice 6 **Savoir déterminer une équation de la tangente à une courbe**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et C_f sa courbe représentative.

a) Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3 est : $\boxed{y = f'(3)(x-3) + f(3)}$

Or, $f(3) = -2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(3) = 2$.

Par suite, une équation de la tangente est : $y = 2(x-3) - 2$ soit $\boldsymbol{y = 2x - 8}$



b) **A la calculatrice,** comme l'atteste le document ci-contre, il semble bien que la droite T soit tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

Exercice 7 **Savoir lire graphiquement un nombre dérivé.**

1. **a)** $f(2) = 2$, $f(1) = 1$ et $f(-1) = 5$

b) **Lorsque f est dérivable en x, $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f de f au point d'abscisse x :** $f'(2) = 2$, $f'(1) = 0$ et $f'(-1) = -4$.

2. $T_A : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $\mathbf{T_A : y = 2x - 2}$

$T_B : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $\mathbf{T_B : y = 1}$

$T_C : y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$ soit $\mathbf{T_C : y = -4x + 1}$

Exercice 8

- **PARTIE A** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

1. $\boldsymbol{f'(x)} = 2 \times 3x^2 - 60 \times 2x + 450 = \boldsymbol{6x^2 - 120x + 450}$

2. $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-120)^2 - 4 \times 6 \times 450 = 3\,600 = 60^2$

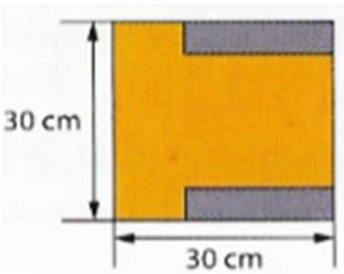
$\Delta > 0$, donc $f'(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{120 - 60}{2 \times 6} = 5$ et $x_2 = \dfrac{120 + 60}{2 \times 6} = 15$

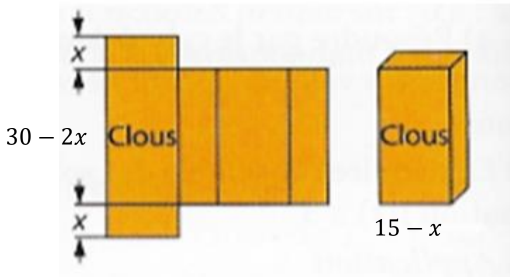
$f'(x)$ est donc du signe de 6 (coef de x^2) sauf entre ses racines 5 et 15.

- **Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
variation de f		↗	1 000	↘	0	↗	

- **PARTIE B**





1. x désigne la mesure, en cm, de la largeur des bandes découpées, donc $\boldsymbol{x > 0}$.
De plus, $30 - 2x$ désigne la mesure, en cm, de la hauteur de la boîte, donc $30 - 2x > 0$ soit $\boldsymbol{15 > x}$.
Les valeurs prises par x appartiennent donc bien à l'intervalle]0 ; 15[.

2. **a)** Pour tout réel x tel que $0 < x < 15$, les dimensions de la boîte sont, en cm, $30 - 2x$, $15 - x$ et x.
La mesure en cm³ du volume de la boîte est : $\mathbf{V}(x) = (30 - 2x)(15 - x)x$

b) $V(x) = (30 - 2x)(15 - x)x = (450 - 30x - 30x + 2x^2)x = 2x^3 - 60x^2 + 450x$ *cqfd*

3. La fonction V étant la restriction de la fonction f à l'intervalle]0 ; 15[, d'après la **partie A**, le volume **$\mathbf{V}(x)$ est maximal pour $x = 5$.**
Les dimensions de la boîte de volume maximal sont donc 20 cm, 10 cm et 5 cm et le volume maximal est **égal à $\mathbf{V(5) = 1\,000}$** (cm³).

Exercice 9

1. **La suite (u_n) est définie par son terme général.** Pour calculer le terme d'indice n de la suite, il suffit donc de remplacer n par sa valeur dans l'expression donnée :
   $u_0 = 3 \times 0 - 2 = \mathbf{-2}$ $\quad$ $u_1 = 3 \times 1 - 2 = \mathbf{1}$
   $u_2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$ $\quad$ $u_3 = 3 \times 3 - 2 = \mathbf{7}$
   La suite (v_n) est définie par récurrence. Chaque terme d'indice $n \geq 1$ de la suite est exprimé en fonction du terme précédent :
   $v_0 = \mathbf{2}$ $\quad$ $v_1 = 3 \times v_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$
   $v_2 = 3 \times v_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = \mathbf{10}$ $\quad$ $v_3 = 3 \times v_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = \mathbf{28}$.
2. Pour calculer un terme de la suite (u_n), il suffit d'utiliser une fois l'expression de la suite donnant le terme général de celle-ci. Pour calculer le terme d'indice n de la suite (v_n), il faut utiliser n fois la formule de récurrence définissant la suite.

```
>>> def u(n) :
        u = 3*n-2
        return(u)
```

```
>>> def v(n) :
        v = 2
        for i in range(1, n+1):
            v = 3*v-2
        print(v)
```

Exercice 10

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = \mathbf{8 + 3n}$.

2. Par suite, $u_{50} = 8 + 3 \times 50 = \mathbf{158}$

3. $S = \sum_{k=0}^{50} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{50}$

$$= u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 3 \times 2) + \ldots + (u_0 + 3 \times 50)$$
$$= 51u_0 + 3(1 + 2 + \ldots + 50)$$
$$= 51 \times 8 + 3\frac{50 \times 51}{2}$$
$$= \mathbf{4\ 233}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique peut aussi être déterminée par la formule :

$\boxed{\textit{Nombre de termes de la somme} \times \frac{\textit{1er terme de la somme} + \textit{dernier terme de la somme}}{2}}$

Soit ici, $S = 51 \times \frac{8 + 158}{2} = \mathbf{4\ 233}$

Exercice 11

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = \mathbf{3 \times 2^n}$.

2. Par suite, $u_9 = 3 \times 2^9 = \mathbf{1\ 536}$

3. $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9$

$$= u_0 + (u_0 \times 2) + (u_0 \times 2^2) + \ldots + (u_0 \times 2^9)$$
$$= u_0(1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^9)$$
$$= 3\frac{1 - 2^{9+1}}{1 - 2}$$
$$= 3 \times (2^{10} - 1)$$
$$= \mathbf{3\ 069}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout réel } q \neq 1,\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ peut aussi être déterminée par la formule : $\boxed{\textit{1}^{er}\textit{ terme de la somme} \times \frac{1 - raison^{\textit{nombre de termes de la somme}}}{1 - raison}}$

Soit ici, $S = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \mathbf{3\ 069}$

Exercice 12

1. La première semaine, 2000 unités sont produites donc $\boldsymbol{u_1 = 2000}$.
   On sait qu'**augmenter une quantité de 10% revient à la multiplier par** $\left(1+\frac{10}{100}\right) = \mathbf{1,1}$ donc la 2e semaine, le nombre d'unités produites est $\boldsymbol{u_2 = 1,1 \times u_1 = 1,1 \times 2000 = 2200}$.
   De même, $\boldsymbol{u_3 = u_2 \times 1,1 = 2200 \times 1,1 = 2420}$ et $\boldsymbol{u_4 = u_3 \times 1,1 = 2420 \times 1,1 = 2662}$.
2. En généralisant ce qui précède, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = 1,1 \times u_n}$.
   Ainsi, la suite (u_n) est une **suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{u_1 = 2000}$ et de raison $\boldsymbol{q = 2000}$.**
3. D'après le cours, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2000 \times 1,1^{n-1}}$.
4. La production totale au cours des 20 premières semaines est $\boldsymbol{S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}}$. Cette somme est la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique (u_n) donc :
   $$S = premier\ terme\ \times \frac{1 - raison^{nombre\ termes}}{1 - raison} = u_1 \times \frac{1-q^{20}}{1-q} = 2000 \times \frac{1-1{,}1^{20}}{1-1{,}1} = 20000(1{,}1^{20}-1) \approx 114550.$$
   Au bout de 20 semaines, **l'entreprise aura donc produit environ 114550 alarmes.**
5. **Pour compléter le script de la fonction *somme***, on commence par définir la suite u comme nous l'avions fait dans l'exercice 9. On initialise la valeur de u à 2000 : $u = 2000$, puis on définit la suite par récurrence : $u = u \times 1{,}1$.
   On procède de la même façon pour définir la somme s. On initialise sa valeur : $s = 0$, puis on indique la relation qui permet de calculer la nouvelle somme :
   $nouvelle\ somme = ancienne\ somme + valeur\ de\ la\ suite$ soit $s = s + u$.
   Pour compléter le script de la fonction *seuil*, il suffit de penser qu'il faut calculer les valeurs de $somme(n)$ à partir de $n = 0$, tant que $somme(n) < 150000$ (c'est-à-dire tant que la condition $somme(n) \geq 150000$ n'est pas réalisée).

```
>>> def somme(n):
        u = 2000
        s = 0
        for i in range(1, n+1):
                s = s+u
                u=u*1.1
        return(s)
```

```
>>> def seuil():
        n = 0
        while somme(n)<150000 :
                n = n+1
        return(n)
```

Remarque Comme l'indique la capture d'écran ci-contre, la fonction *seuil* indique $n = 23$, ce qui semble correct car :
$$somme(22) < 150000 < somme(23).$$
L'entreprise aura donc fabriqué plus de 150000 unités à partir de la 23e semaine.

```
>>> seuil()
23
>>> somme(22)
142805.49877367966
>>> somme(23)
159086.04865104763
```

FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 13 **Savoir utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.**

a) $e^5 \times e^{-2} \times e^3 = e^{5+(-2)+3} = \boldsymbol{e^6}$.

b) $(e^5 \times e^2)^4 = (e^{5+2})^4 = (e^7)^4 = e^{7\times 4} = \boldsymbol{e^{28}}$.

c) $\frac{e^{-2}\times(e^3)^2}{e^2} = \frac{e^{-2}\times e^{3\times 2}}{e^2} = \frac{e^{-2+6}}{e^2} = e^{4-2} = \boldsymbol{e^2}$.

d) Pour tout réel x, $\frac{(e^x)^2 \times e^{x+1}}{e^{x-1}} = \frac{e^{2x}\times e^{x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+(x+1)-(x-1)} = \boldsymbol{e^{2x+2}}$.

Dans cet exercice, on n'utilise notamment les formules suivantes :
pour tout réel a et b et pour tout entier naturel n,
$e^a \times e^b = e^{a+b}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$(e^a)^n = e^{na}$.

Exercice 14 **Savoir résoudre une équation où apparaît la fonction exponentielle.**

a) $e^{x+2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+2} < e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2<0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S =]-\infty\,;\,-2[$.

b) $e^{5x+1} \geq e \times e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{5x+1} \geq e^1 \times e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{5x+1} \geq e^{1+2x} \Leftrightarrow 5x+1 \geq 1+2x \Leftrightarrow 3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 0.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S = [0\,;\,+\infty[$.

c) $e^{(x^2)} = e \Leftrightarrow e^{(x^2)} = e^1 \quad \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -1.$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{-1\,;\,1\}$.

d) On reconnaît une « équation produit nul » donc :

$$(e^x - e^2)(e^{-x}+5) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^2 = 0 \; ou \; e^{-x}+5=0$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^2 \; ou \; e^{-x} = -5 \quad \Leftrightarrow x = 2 \; ou \; e^{-x} = -5$$

L'équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est une fonction à valeurs strictement positives.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{2\}$.

Exercice 15 **Savoir étudier une fonction où apparaît la fonction exponentielle.**

On rappelle la dérivée la fonction exp est la fonction exp : $exp' = exp$.

Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5-x)e^x$.

a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = 5-x \text{ et } u'(x) = -1 \\ \mathrm{v}(\mathrm{x}) = e^x \text{ et } \mathrm{v}'(\mathrm{x}) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)} = -1e^x + (5-x)e^x = e^x(1+5-x) = \boldsymbol{e^x(4-x)}$.

b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc **$f'(x)$ est du signe de $4-x$.**

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e^4	$\searrow$	

$f(4) = (5-4)e^4 = e^4$.

Etude de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (e^x+1)(e^x-3)$.

a) $g = u \times v$ donc $g' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x+1 \text{ et } u'(x) = e^x \\ \mathrm{v}(\mathrm{x}) = e^x - 3 \text{ et } \mathrm{v}'(\mathrm{x}) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{g'(x)} = e^x(e^x-3) + (e^x+1)e^x = e^x(e^x - 3 + e^x + 1) = \boldsymbol{2e^x(e^x-1)}$.

b) Pour tout réel x, $2e^x > 0$ donc **$g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.**

Pour tout réel x, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction g est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

$g(0) = (e^0+1)(e^0-3) = -4$

Etude de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x-2}{e^x}$.

a) $h = \frac{u}{v}$ donc $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 2 \text{ et } u'(x) = 1 \\ \text{v}(\text{x}) = e^x \text{ et } \text{v}'(\text{x}) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{h'(x)} = \frac{\boldsymbol{1e^x - (x-2)e^x}}{\boldsymbol{(e^x)^2}} = \frac{e^x(1-(x-2))}{e^{2x}} = e^{-x}(3 - x)$.

b) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $\boldsymbol{h'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{3 - x}$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction h est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↗	e^{-3}	↘	

$$h(3) = \frac{3-2}{e^3} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}.$$

Exercice 16 **Savoir utiliser la formule permettant de calculer la dérivée de $\boldsymbol{e^{ax+b}}$.**

Le taux d'alcoolémie d'un homme est donné par la fonction f définie sur $I = [0\,;\,4]$ par : $f(x) = 3xe^{-1{,}25x}$.

a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x \text{ et } u'(x) = 3 \\ \text{v}(\text{x}) = e^{-1{,}25x} \text{ et } \text{v}'(\text{x}) = -1{,}25e^{-1{,}25x}. \end{cases}$

(La dérivée de $x \longmapsto e^{ax+b}$ est $x \longmapsto a \times e^{ax+b}$)

D'où, pour tout réel x de l'intervalle I, $\boldsymbol{f'(x)} = 3e^{-1{,}25x} + 3x \times (-1{,}25) \times e^{-1{,}25x} = \boldsymbol{e^{-1{,}25x}(3 - 3{,}75x)}$

b) Pour tout réel x dans I, $e^{-1{,}25x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3 - 3{,}75x$.

$$3 - 3{,}75x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3{,}75} \Leftrightarrow x = 0{,}8.$$

Ainsi, le tableau de variations de la fonction f est :

x	0		$0{,}8$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$2{,}4e^{-1}$	↘	$12e^{-5}$

$f(0) = 3 \times 0 \times e^{-1{,}25\times0} = 0$

$f(0{,}8) = 3 \times 0{,}8 \times e^{-1{,}25\times0{,}8} = 2{,}4e^{-1}$

$f(4) = 3 \times 4 \times e^{-1{,}25\times4} = 12e^{-5}$.

c) Le taux est donc maximal au bout de 0,8 heures 'est-à-dire au bout de **48 min** (ar 0, 8 × 60 = 48)