

Principales démonstrations par récurrence

Exercice 1 : Somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme des cubes des n premiers entiers $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On ajoute aux deux membres de l'égalité le terme suivant de la somme. On transforme l'expression du membre de droite (mise au même dénominateur, factorisation) pour obtenir l'expression désirée. Si on a des difficultés à factoriser, alors on développe l'expression obtenue et l'expression à obtenir (que l'on a déterminée lors de l'étape du « Montrons que... ») pour les comparer.

1. **Initialisation** : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 1$.

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1 \quad \text{La propriété est donc vraie pour } n = 1.$$

2. **Hérédité** : Supposons que la propriété est vraie pour un entier k non nul donné, c'est-à-dire : $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}$

$$\text{Montrons qu'elle est alors vraie pour } k + 1 \text{ c'est-à-dire } 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} \text{ d'où, par somme avec } (k+1)^3 :$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + \frac{4 \cdot (k+1)^3}{4}$$

Factorisons $(k+1)^2$ dans le terme de droite :

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 \cdot (k+1)^3)}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4 \cdot (k+1))}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4k + 4)}{4}. \text{ On reconnaît une identité remarquable.}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

$$\text{Nous avons donc montré que : } 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}.$$

Ce qui prouve que la propriété est vraie pour $k+1$.

3. **Conclusion**

Par le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.



Exercice 2 : Formule explicite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n + \frac{1}{6}$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - 2$.

On exprime la forme explicite au rang supérieur pour savoir l'expression à obtenir.

On remplace u_n dans la formule de récurrence par la forme explicite de u_n supposée exacte.

On effectue les calculs pour obtenir la forme explicite conjecturée au rang supérieur.

1) Calculer (u_1) et (u_2)

$$\text{Pour } u_1 : u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Pour } (u_2) : u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - 2$

Initialisation :

Pour $(n = 0) : u_0 = 4$ et :

$$6\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{2} \times 0 - 2 = 6 \times 1 + 0 - 2 = 6 - 2 = 4$$

Donc, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un certain n , c'est-à-dire : $u_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - 2$.

Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$: $u_{n+1} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}(n + 1) - 2 = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(6\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - 2 \right) + n + \frac{1}{6}$$

$$u_{n+1} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{2}{3} + n + \frac{1}{6}$$

$$u_{n+1} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$$

$$u_{n+1} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$$

Donc, la propriété est vraie pour $n + 1$.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Exercice 3 : Inégalité (majorant – minorant)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

Démontrer par récurrence que $u_n < 6$.

On applique les opérations successives dans l'ordre des priorités opératoires sur les deux membres de l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1} . On vérifie que l'inégalité obtenue répond au critère attendu.

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = -2$ Nous avons bien $u_0 < 6$.

Hérédité

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$. Montrons que $u_{n+1} < 6$.

En utilisant la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$

Puisque $u_n < 6$, nous avons : $\frac{1}{2}u_n < \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Donc : $\frac{1}{2}u_n + 2 < 3 + 2$

$u_{n+1} < 5$ et $5 < 6$

Ainsi, $u_{n+1} < 6$.

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Inégalité (théorème de comparaison – d'encadrement - variations d'une suite)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.

On applique les opérations successives dans l'ordre des priorités opératoires sur les deux membres de l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1} .

On vérifie que l'inégalité obtenue répond au critère attendu.

Lors d'un encadrement par des expressions littérales, on peut étudier le signe de la différence entre l'expression souhaitée et celle obtenue pour savoir laquelle est la plus grande.

1) Calculer u_1 et u_2

Pour u_1 : $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 - 0 + 3 = 3$

Pour u_2 : $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3 - 2 + 3 = 9 - 2 + 3 = 10$

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$

Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ Nous avons bien $u_0 \geq 0$.

Hérédité :

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$. Nous devons montrer que $u_{n+1} \geq n + 1$.



En utilisant la relation de récurrence : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

Puisque $u_n \geq n$, nous avons : $3u_n \geq 3n$

Donc : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3 = n + 3$

Puisque $n + 3 \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $u_{n+1} \geq n + 1$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion

Par le principe de récurrence, nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

Exercice 5 : Inégalité (comparaison ou encadrement avec fonction associée)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

a. Donner le tableau de variation de la fonction f .

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

b. Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs à $\sqrt{2}$.

Comme u_n apparaît plusieurs fois dans la formule de la suite, on ne peut plus procéder par opérations successives sur l'inégalité comme dans les exercices 3 et 4.

On associe la fonction f à la suite (u_n) de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

On démontre que f est croissante (étude de sa dérivée).

On applique la fonction f sur l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1} . Une fonction croissante ne change pas l'ordre de l'inégalité.

On conclut.

a. Tableau de variation de la fonction f :

Pour déterminer le tableau de variation de f , nous devons calculer sa dérivée et analyser son signe.

1. **Calcul de la dérivée $f'(x)$** : f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions de références définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = 0,5\left(x + \frac{2}{x}\right) \text{ ainsi } f'(x) = 0,5\left(1 - \frac{2}{x^2}\right).$$

2. **Étude du signe de $f'(x)$** : $f'(x) = 0,5\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Pour $x > \sqrt{2}$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante. Pour $0 < x < \sqrt{2}$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
f			$\swarrow$	$\searrow$	



b. Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs à $\sqrt{2}$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ Nous avons $3 > \sqrt{2}$.

Hérédité :

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$.

Montrons que $u_{n+1} > \sqrt{2}$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$

Puisque $u_n > \sqrt{2}$, nous avons $f(u_n) > f(\sqrt{2})$. La fonction f étant croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, l'ordre de l'inéquation est conservé. De plus $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Donc : $u_{n+1} > \sqrt{2}$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion

Par le principe de récurrence, nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$.

Exercice 6 : Encadrement (théorème des gendarmes)

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.

On applique les opérations successives dans l'ordre des priorités opératoires sur les 3 membres de l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1} . On vérifie que l'inégalité obtenue répond au critère attendu.

Initialisation

Pour $n = 0$: $v_0 = -1$

Nous avons bien $-1 \leq v_0 \leq 0$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq v_n \leq 0$. Nous devons montrer que $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$.

En utilisant la relation de récurrence : $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

$$-1 \leq v_n \leq 0$$

$1 \geq v_n^2 \geq 0$ la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$-\frac{1}{2} \leq v_n^2 \leq 0 \text{ par produit par } -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } -1 \leq v_{n+1} \leq 0$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion

Par le principe de récurrence, nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq v_n \leq 0$.



Exercice 7 : Les multiples

Démontrer par récurrence que $2^{3n} - 1$ est multiple de 7 pour tout entier naturel n .

On écrit la relation $2^{3n} - 1 = 7p$ avec p un entier relatif pour traduire l'énoncé en égalité.

On isole le terme en puissance.

On multiplie l'égalité par la puissance nécessaire pour passer à l'exposant souhaité.

On pondère l'égalité pour obtenir l'expression désirée au rang supérieur.

On factorise le membre de droite par le multiple.

Initialisation

Pour $n = 0$: $2^{3 \times 0} - 1 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

0 est bien un multiple de 7. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. Cela signifie qu'il existe un entier k tel que : $2^{3n} - 1 = 7k$

Montrons que $2^{3(n+1)} - 1$ est aussi un multiple de 7.

On a :

$$2^{3n} - 1 = 7k$$

$$2^{3n} = 7k + 1$$

$$2^3 \times 2^{3n} = 2^3(7k + 1)$$

$$2^{3n+3} = 56k + 8$$

$$2^{3n+3} - 1 = 56k + 8 - 1$$

$$2^{3(n+1)} - 1 = 56k + 7$$

$$2^{3(n+1)} - 1 = 7(8k + 1)$$

k est entier ainsi $8k + 1$ est entier donc $2^{3(n+1)} - 1$ est un multiple de 7

Conclusion

Par le principe de récurrence, nous avons montré que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.