Principales démonstrations par récurrence

Méthodes pour mener à bien l'étape d'hérédité

Exercice 1 : Somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme des cubes des n premiers entiers $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On ajoute aux deux membres de l'égalité le terme suivant de la somme. On transforme l'expression du membre de droite (mise au même dénominateur, factorisation) pour obtenir l'expression désirée. Si on a des difficultés à factoriser, alors on développe l'expression obtenue et l'expression à obtenir pour les comparer.

Exercice 2 : Formule explicite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n + \frac{1}{6}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - 2$.

On exprime la forme explicite au rang supérieur pour savoir l'expression à obtenir.

On remplace u_n dans la formule de récurrence par la forme explicite de u_n supposée exacte.

On effectue les calculs pour obtenir la forme explicite au rang supérieur conjecturée.

Exercice 3 : Inégalité (majorant – minorant)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

Démontrer par récurrence que $u_n < 6$.

On applique les opérations successives dans l'ordre des priorités opératoires sur les deux membres de l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1}. On vérifie que l'inégalité obtenue répond au critère attendu.

Exercice 4 : Inégalité (théorème de comparaison - variations)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 etu_2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,$u_n \geq n$.

On applique les opérations successives dans l'ordre des priorités opératoires sur les deux membres de l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1}. On vérifie que l'inégalité obtenue répond au critère attendu. Avec des expressions, on peut étudier le signe de la différence entre l'expression souhaitée et celle obtenue pour savoir laquelle est la plus grande.

Exercice 5 : Inégalité (sens de variation)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

a. Donner le tableau de variation de la fonction f.

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

b. Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs à $\sqrt{2}$.

Comme u_n apparait plusieurs fois dans la formule de la suite, on ne peut plus procéder par opérations successives sur l'inégalité comme dans les exercices 3 et 4.

On associe la fonction f à la suite (u_n) de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

On démontre que f est croissante (étude de sa dérivée).

On applique la fonction f sur l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1} . Une fonction croissante ne change pas l'ordre de l'inégalité.

On conclut.

<u>Exercice 6 : Encadrement (théorème des gendarmes)</u>

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2 \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leq v_n \leq 0$.

On applique les opérations successives dans l'ordre des priorités opératoires sur les 3 membres de l'inégalité pour passer de u_n à u_{n+1}. On vérifie que l'inégalité obtenue répond au critère attendu.

<u>Exercice 7 : Les multiples</u>

Démontrer par récurrence que $2^{3n} - 1$ est multiple de 7 pour tout entier naturel n.

On écrit la relation $2^{3n} - 1 = 7p$ avec p un entier relatif pour traduire l'énoncé en égalité.

On isole le terme en puissance.

On multiplie l'égalité par la puissance nécessaire pour passer à l'exposant souhaité.

On pondère l'égalité pour obtenir l'expression désirée au rang supérieur.

On factorise le membre de droite par le multiple.