Principales démonstrations par récurrence

Exercice 1 : Somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme des cubes des n premiers entiers $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 2 : Formule explicite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n + \frac{1}{6}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - 2$.

Exercice 3 : Inégalité (majorant – minorant)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

Démontrer par récurrence que $u_n < 6$.

Exercice 4 : Inégalité (théorème de comparaison - variations)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

Exercice 5 : Inégalité (sens de variation)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

a. Donner le tableau de variation de la fonction f.

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

b. Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs à $\sqrt{2}$.

Exercice 6 : Encadrement (théorème des gendarmes)

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2 \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leq v_n \leq 0$.

Exercice 7 : Les multiples

Démontrer par récurrence que $2^{3n} - 1$ est multiple de 7 pour tout entier naturel n.