

Recueil d'exercices du Baccalauréat sur les Suites Numériques

Session 2021	page 2
Session 2022	page 10
Session 2023	page 24
Session 2024	page 44

Recueil d'exercices sur les suites numériques

EXERCICE 1 - Polynésie 2 juin 2021

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.
2. a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

- b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

- d. Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 - Asie 7 juin 2021

5 points

Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n):  
    u = 1000  
    for i in range(n):  
        u = 0,9*u + 250  
    return u
```

4.
 - a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2500$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c. Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.
Déterminer cette année.

5 points

EXERCICE 3 - Asie 8 juin 2021

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.

Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.

Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0,05(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1,95$.
2.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.
 - b. On pose pour tout entier naturel n , $v_n = 20 - u_n$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.

D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = 0,05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$L(t) = 20 - 19e^{-0,05t}.$$

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t .
 - a. Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
 - b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.

Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice?

EXERCICE 4 - Métropole 7 juin 2021

6 points

Commun à tous les candidats

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25°C .

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3^\circ\text{C}$.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n, T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n , on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$
2. Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $T_n \leq 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$.
 - a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0 .
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.
 - c. En déduire la limite de la suite (T_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7.
 - a. Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
 - b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10°C . Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
 - c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil() :
    n=0
    T= .....
    while T .....
        T= .....
        n=n+1
    return
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE 5 - Métropole 8 juin 2021**5 points****Commun à tous les candidats**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1.

La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n .

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question 6.).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .

En déduire la limite de la suite (u_n) .

Commun à tous les candidats

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3\,000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

EXERCICE 7 - Centres étrangers 10 juin 2021
Commun à tous les candidats

5 points

Au 1^{er} janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1^{er} janvier de l'année 2020 + n .

1.
 - a. Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.
 - b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
 - c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while ..... :
    u = .....
    n = .....
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 12\,500$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n .
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
 - b. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c. En déduire, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
 - d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4},$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1^{er} janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

Exercice 8 - Métropole 13 septembre 2021

5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
3.
 - a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :  
    u = 0,5  
    n = 0  
    while .....  
        u = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

- b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4 .
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$.
- c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .

Exercice 9 - Métropole 13 septembre 2021

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
 - a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .
 - b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante. On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n) .

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4.
 - a. Démontrer que $\ell = \ell'$.
 - b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
 - c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .

Exercice 10 - Polynésie 4 mai 2022

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1.
 - a. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
 - b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

1.	<code>def liste(k) :</code>
2.	<code> L = []</code>
3.	<code> u = ...</code>
4.	<code> for i in range(0, k+1) :</code>
5.	<code> L.append(u)</code>
6.	<code> u = ...</code>
7.	<code> return(L)</code>

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la valeur de sa limite.
5.
 - a. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
 - b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

EXERCICE 11 - Polynésie 5 mai 2022**Thèmes : suites, fonctions**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 40 \\ u_{n+1} &= 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
3.
 - a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
 - b. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100.$$

- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :  
    n=0  
    u = 40  
    while u < p :  
        n =n+1  
        u = 0.008*u*(200-u)  
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

EXERCICE 12 - Centres Etrangers 11 mai 2022 **Thèmes : Fonction exponentielle et suite**

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^x - x$$

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3. En déduire que :
si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ alors $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0. Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse.

On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

où h est la fonction définie à la partie A.

- b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n) .

n	u_n
1	0,718281828
2	0,148721271
3	0,062279092
4	0,034025417
5	0,021402758
6	0,014693746
7	0,010707852
8	0,008148453
9	0,006407958
10	0,005170918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2} .

Thèmes : Fonction logarithme et suite

EXERCICE 13 - Centres Etrangers 12 mai 2022

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et les limites.
- c. Justifier que pour tout $x \in]0; 1[, f(x) \in]0; 1[$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. Dédurre de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 14 - Asie 17 mai 2022

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3.
 - a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
 - a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():  
    u=1  
    n=0  
    while .....:  
        u=.....  
        n = n+1  
    return n
```

- b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2,5 - u_n$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0) .
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
 - c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.

La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f , définie sur $[0 ; +\infty[$, par

$$f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t},$$

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.

On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min?

2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.
3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4. b. du modèle discret de la Partie A.

EXERCICE 15 - Asie 18 mai 2022

7 points

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n , on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

- a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

- b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type?

- c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

2. a. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

- b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n) .

- a. Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

- b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n) .

6. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

1	<code>def suite(n) :</code>
2	<code> p= ...</code>
3	<code> s=[p]</code>
4	<code> for i in range (...) :</code>
5	<code> p=...</code>
6	<code> s.append(p)</code>
7	<code> return (s)</code>

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

Principaux domaines abordés : Suites; Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 - b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x \left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2 \ln(2); +\infty[$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2 \ln(2)$ par f .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.
2.
 - a. On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Démontrer que $\ell = 4$.
 - b.

On considère la fonction valeur écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :
    u = 0
    n = 0
    while u <= a:
        u=1 + u - exp(0.5*u - 2)
        n = n+1
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
 - b. Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
 - c. Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
 - c. Calculer la limite de la suite (T_n) .
 - d. Résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.
 On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C .
 La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.
 - a. Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
 - b. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x):
    T = 180
    n = 0
    while T > x:
        T = 0.955*T + 0.9
        n = n + 1
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temp(120)`.
 Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 18 - Centres Etrangers 19 mai 2022

Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ; Suites

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0; 1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0; 1]$. On note f' sa fonction dérivée.
 Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a $xe^{-x} < 1$.
 En déduire le tableau de variation de f sur $]0; 1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0; 1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

- a. Calculer a_1 et b_1 . On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
b. On considère ci-dessous la fonction termes, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :  
    a=1/10  
    b=1  
    for k in range(0,n) :  
        c= ...  
        b = ...  
        a = c  
    return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

2. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$$

- b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n) .
On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0; 1]$, et que $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$.
a. Démontrer que $f(A) = 0$.
b. Déterminer $A - B$.

EXERCICE 19 - Amérique du Nord 19 mai 2022

Thème : probabilités, suites

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée. La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

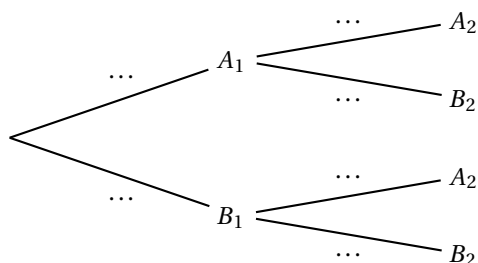
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n , on définit les évènements suivants :

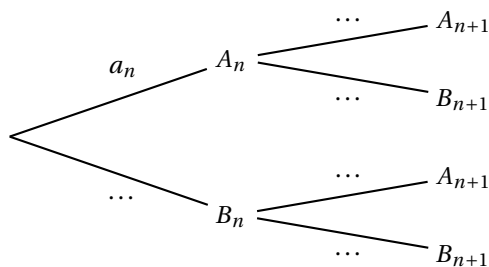
- A_n : « le vélo se trouve au point A le n -ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n -ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n , on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n . Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2.
 - a. Calculer a_2 .
 - b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millièème.
3.
 - a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $n + 1$ -ième matins.



- b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
 5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
 6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 20 - Polynésie 30 août 2022

suites, fonctions

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

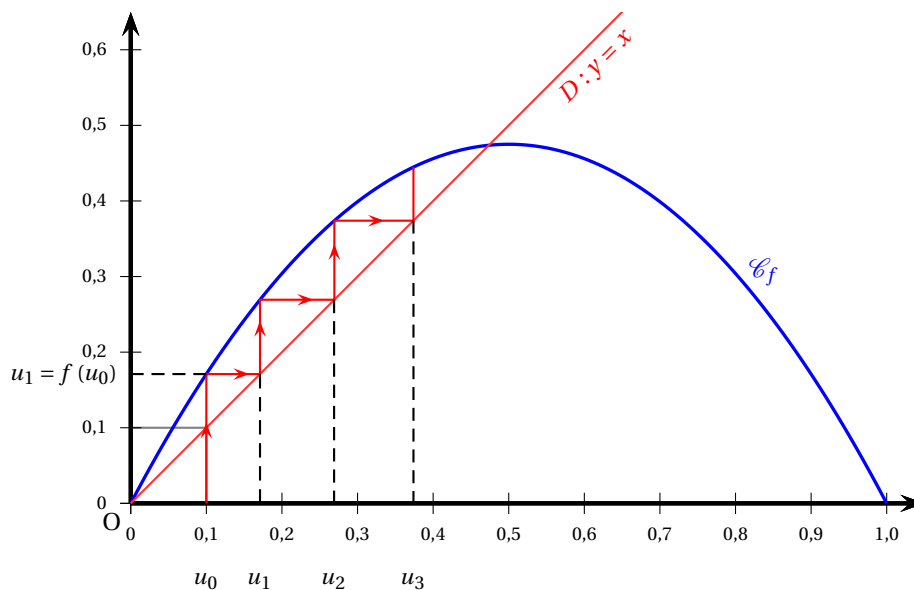
Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - b. En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. a. En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.
c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python algo (p) où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p):
        u = 1/2*u*(1 - u)
        n = n+1
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande algo (p) de renvoyer une valeur.

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.

EXERCICE 22 - Amérique du Sud 26 septembre 2022**7 points**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .

- b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p . Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n) .

```
def suite_u(p) :
    u= ...
    for i in range(1,...) :
        u =...
    return u
```

2.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 4$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3.
 - a. Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.
 - b. En déduire la valeur de ℓ .
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
 - b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.
 - c. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 23 - Amérique du Sud 27 septembre 2022

7 points

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2 .
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leq u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1000(1 + 0,9^n)$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

- a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq 1020$.

Justifier la réponse par un calcul.

- b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.

Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S .

```
1 def population(S) :  
2     n=0  
3     u=2000  
4  
5     while .....:  
6         u= ...  
7         n = ...  
8     return ...
```

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

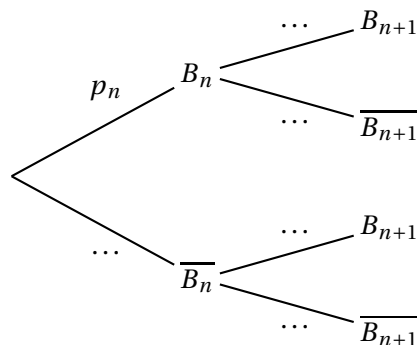
On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.

Soit n un entier naturel.

On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n .

Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.
 - b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc?
5.
 - a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
 - b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .
 - c. En déduire la limite de la suite (p_n) .

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.

Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 25 - Polynésie 13 mars 2023

Thème : suites, fonctions

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.
 - c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $] -3 ; -1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

- a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3	-2	-1
Variations de g	$-\infty$	$g(-2)$	1

- b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3} .

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

- a. En utilisant la formule donnée à la question 1. a., démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.
- b. Soit n un entier naturel.
Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.
- c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.
- d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

EXERCICE 26 - Centres Etrangers G1 14 mars 2023

6 points

On considère la fonction f définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x + 3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $] -1,5 ; +\infty[$.
3.
 - a. Démontrer que, dans l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
 - b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.
2.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

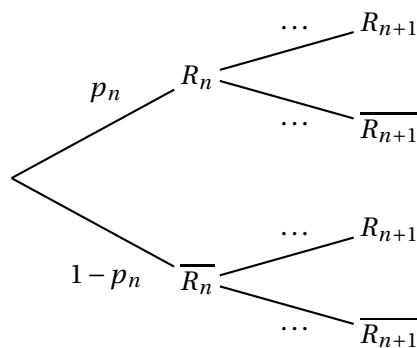
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90% des cas le jour suivant;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70% des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n -ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n . On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n , on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = p_n - 0,75$.

- a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

- c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .
- d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geq 9)$, à 10^{-3} près.

EXERCICE 28 - Métropole 20 mars 2023

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n -ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geq 1, u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.
Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :  
    n=1  
    u=3  
    while u<=p :  
        n=n+1  
        u=0.9*u+1.3  
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times (n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n -ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2 .
2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification?
Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme?

EXERCICE 29 - Métropole 21 mars 2023

5 points

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

- a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
c. Déterminer la valeur de ℓ .
Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.
4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.
 - a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.4)` ?
 - b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.35)`.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :  
    v=0.1  
    n=0  
    while v<a :  
        v=1.6*v-1.6*v*v  
        n=n+1  
    return n
```

EXERCICE 30 - Centres Etrangers 21 mars 2023

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

EXERCICE 30 - Centres Etrangers 21 mars 2023

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

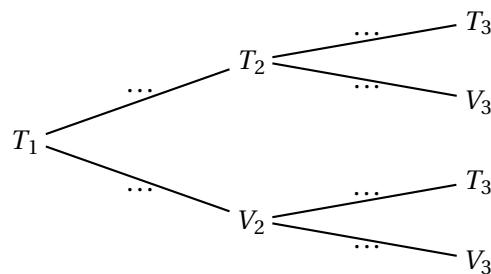
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n -ième jour »
- V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n -ième jour »
- On note p_n la probabilité de l'évènement T_n ,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2^e et 3^e jours,

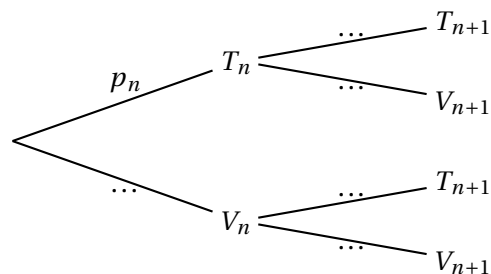


2. Calculer p_3

3. Le 3^e jour, M. Durand utilise son vélo.

Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n -ième et $(n + 1)$ -ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f' .
3.
 - a. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
 - b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; 0[$.
4.
 - a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right).$$

- b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f .

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millièmme de u_1 .
2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Dédurre des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a l'inégalité

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600.$$

3.
 - a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 - b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : `mystere (500)` ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.

Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.

Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.

Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

EXERCICE 33 - Asie 24 mars 2023

4 points

Marie Skłodowska-Curie (1867 – 1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.

Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.

On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1.
 - a. Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.
 - b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n , on a

$$v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2.
 - a. Démontrer, par récurrence sur n , que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
 - b. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

- a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1)$.
 - c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.
5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```

1 def noyaux (n) :
2     V=6*10**21
3     L=[V]
4     for k in range (n) :
5         V= ...
6         L.append(V)
7     return L

```

- a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.
 - b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude?

EXERCICE 34 - Amérique du Nord 27 mars 2023

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}; +\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a .

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n , on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1.
 - a. Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.
 - b. Établir que pour tout entier naturel n ,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
1 def heron(n):
2     L=5
3     l=2.2
4     for i in range(n):
5         L = (L+l) / 2
6         l = 11 / L
7     return round(l,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.

- a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?
- b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

EXERCICE 35 - La Réunion 28 mars 2023

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\frac{11}{4}$
c. 3,5

b. $\frac{13}{2}$
b. 2,7

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$
c. constante.

b. géométrique de raison $\frac{1}{2}$
d. ni arithmétique, ni géométrique.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.

On rappelle qu'en langage Python « i in range(n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

1	def terme (n)
2	U=3
3	for i in range(n) :
4	
5	return U

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n , on peut compléter la ligne 4 par :

a. $U = U/2 + (i+1)/2+1$
c. $U = U/2 + (i-1)/2+1$

b. $U = U/2 + n/2 + 1$
d. $U = U/2 + i/2 + 1$

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$n \leq u_n \leq n + 3.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

EXERCICE 36 - Amérique du Nord 28 mars 2023

5 points

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) , où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1 700$ et $b_0 = 1 300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel n , déterminer une relation liant a_n et b_n .

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n , on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700.$$

- b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

- b. Exprimer v_n en fonction de n .

- c. En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.

6. a. Déterminer la limite de la suite (a_n) .

- b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7. a. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while ... :
        n=n+1
        A = ...
    return
```

- b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

EXERCICE 37 - La Réunion 29 mars 2023

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1 .

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

- b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

- a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

- a. Calculer v_0 .
- b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.
- c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n) .
En déduire la limite de (u_n) .

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.
Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil(2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 8
    while u > A:
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 38 - Nouvelle-Calédonie 28 aout 2023

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1.
 - a. Démontrer que $u_1 = 12$.
 - b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
- b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.

- Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
- Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 39 - Nouvelle-Calédonie 29 août 2023

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

- Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
- On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

- Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n.$$

- En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

- Donner v_0 .
- Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
- En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 40- Métropole 12 septembre 2023**5 points**

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{e} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \text{ pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3 . On détaillera les calculs.
2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n . Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	<code>def suite(n):</code>
L_2	<code>.....</code>
L_3	<code>for i in range(1, n):</code>
L_4	<code>u=.....</code>
L_5	<code>return u</code>

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \frac{1}{n} \leq e$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier votre réponse.
4. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \frac{n}{e^n}$.
 b. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n) .

Exercice 41 - Amérique du Sud 26 septembre 2023**5 points****Partie A**

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
 Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.

En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année 2022 + n . Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n (1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
 - a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b. Déterminer la limite de P_n .
2. Dans cette question $b = 0,2$.
 - a. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.
 - b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Exercice 42 - Amérique du Sud 27 septembre 2023

5 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Soit n un entier naturel.
Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n .

```
def suite_u(n) :  
    u = ...  
    for i in range(1,n+1) :  
        |    u= ...  
    return u
```

3.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
 - c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3, On considère la suite (v_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

→ En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ag+dessous :

```
def suite_v(n):  
    L = []  
    for i in range(n+1) :  
        L.append(suite_u(i)-2*i+1)  
    return L
```

La commande « `L.append` » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste `L`.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)  
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n .

Démontrer cette conjecture.

b. En déduire, pour tout entier naturel n , la forme explicite de u_n en fonction de n .

EXERCICE 43 - Polynésie 7 septembre 2023

Thème : suites, algorithmique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leq f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x - 2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On a donc, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction « seuil » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :  
    u = 3  
    n = 0  
    while ...  
        u = ...  
        n = ...  
    return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

Exercice 44 - Amérique du Nord Jour 1 (21 mai 2024)

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) \, dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) \, dx.$$

1. Calculer I_0 .
2.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
 - c. Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} \, dx.$$

- b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} \, dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

- c. Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .
4.
 - a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n = 0
4      I = 2
5      ...
6          n=n+1
7          I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8  return n
```

Exercice 45 - Amérique du Nord Jour 2 (22 mai 2024)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

2. Calculer u_1 et u_2 .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :  
    n=0  
    u=0.5  
    while u < 0.95 :  
        n=...  
        u=...  
    return n
```

Exercice 46 - Centres Etrangers Jour 1 (5 juin 2024)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1.
 - a. Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.
 - b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}.$$

- c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4.
 - a. Justifier que pour tout entier naturel n , $\ln(2) - u_n$ est positif.
 - b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir. Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    u = 0.1  
    while ln(2) - u ... 0.0001 :  
        n = n + 1  
        u = ...  
    return (u, n)
```

- c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction `seuil()`.

Exercice 47 - Centres Etrangers Jour 2 (6 juin 2024)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n .

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
1 from math import *
2 def seuil(n):
3     u=5
4     i=0
5     l =(1 + sqrt(5))/2
6     while abs(u-l)>=10**(-n):
7         u=sqrt(u+1)
8         i=i+1
9     return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** renvoie la valeur absolue de x .

- a. Donner la valeur renvoyée par `seuil (2)`.
- b. La valeur renvoyée par `seuil (4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 48 - Asie Jour 1 (10 juin 2024)

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.

2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n , on a $u_n \leq \frac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

Affirmation 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
1 ▼ def terme(N) :  
2     U = 1  
3 ▼     for i in range(N) :  
4         U = U + i  
5     return U
```

Affirmation 3 : `terme(4)` renvoie la valeur 7.

4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

- Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours;
- Prix B : il reçoit 1 euro le 1^{er} jour, 2 euros le 2^e jour, 4 euros le 3^e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln x \, dx.$$

Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

Exercice 49 - Asie Jour 2 (11 juin 2024)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0; +\infty[$.

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0; +\infty[$.

Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g .

Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

Résoudre, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ .

Exercice 50 - Asie Jour 2 (11 juin 2024)

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

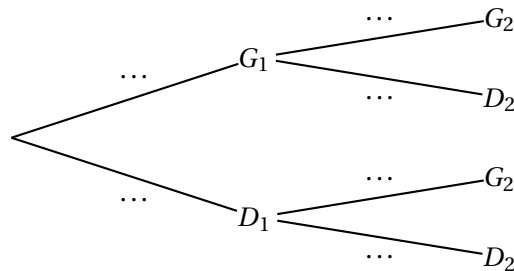
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n -ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n -ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n .

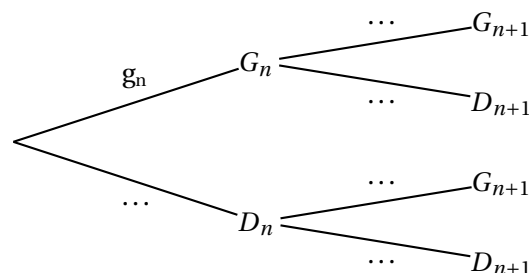
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .
4. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $(n+1)$ -ième parties de la journée.
 - b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$



5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) .

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1▼ def seuil(e) :  
2    g=0.5  
3    n=1  
4▼ while ... :  
5        g = 0.5g+0.2  
6        n = ...  
7    return (n)
```

Remarque : Dans le sujet original, le symbole $*$ est omis dans la relation de récurrence de la suite à la ligne 5 du code Python. La retranscription de l'A.P.M.E.P. a corrigé cet oubli à supposer que s'en soit un. L'énoncé ci-dessus est fidèle à la version originale du sujet compte tenu de la question qui demande de compléter les lignes 4, 5 et 6.

Exercice 51 - Métropole jour 2 (20 juin 2024)

Les parties A et B sont indépendantes

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$.

Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel n , on note v_n le taux de chlore, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
On admet que pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3.$$

- a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
 - b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes? Justifier la réponse.
 4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s):  
    n = 0  
    u = 0.7  
    while ...:  
        n = ...  
        u = ...  
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2.
 - a. Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
 - b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 52 - Polynésie jour 2 (20 juin 2024)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1.
 - a. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2 .
 - b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif a , `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de a .

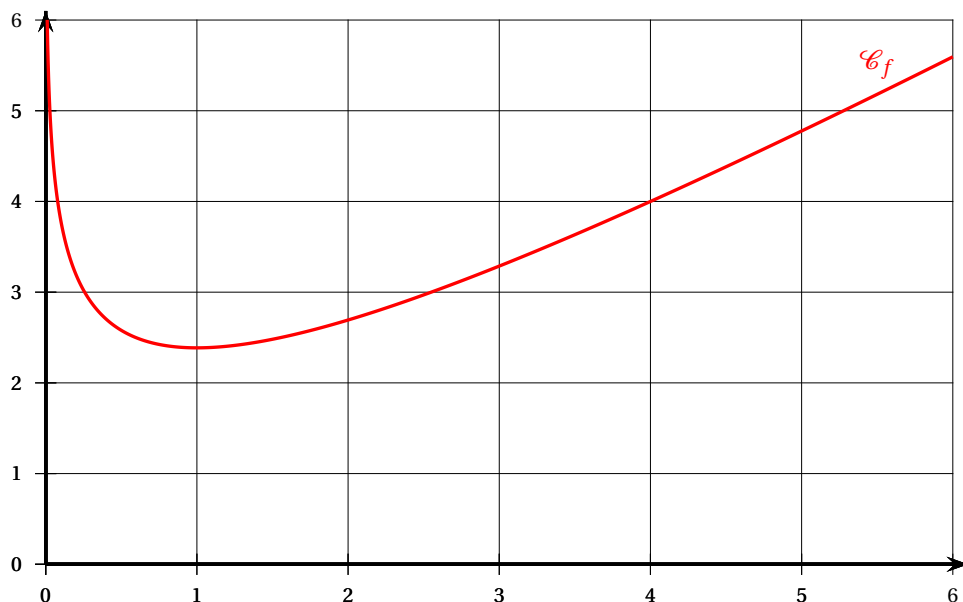
```
def mystere(k):  
    u = 8  
    S = 0  
    for i in range(k):  
        S = S + u  
        u = u - log(u / 4)  
    return S
```

L'exécution de `mystere(10)` renvoie 58.44045206721732. Que représente ce résultat?

- c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n) .
2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $[0; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 3. a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- b.** En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.

On note ℓ la valeur de cette limite

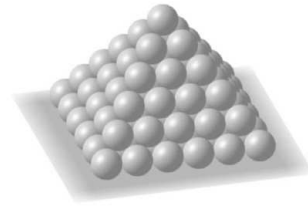
- c.** Résoudre l'équation $f(x) = x$.

- d.** En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 53 - Polynésie septembre (5 septembre 2024)

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1^{er} étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule;
- le 2^e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules;
- le 3^e étage possède 9 boules;
- ...
- le n -ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n -ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

- a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.
- b. On considère la fonction pyramide ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n , l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :  
    S = 0  
    for i in range(1, n+1) :  
        S = ...  
    return ...
```

- c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

- d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible?

Exercice 54 - Métropole remplacement (11 septembre 2024)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leq S_n \leq 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geq 1, v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^n - n$.

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n .

```
def u(n) :  
    valeur = 2  
    for k in range(n) :  
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)  
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leq u_n \leq 2.$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 55 - Amérique du Sud Jour 1 (21 novembre 2024)

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 &= 1 \\ w_{n+1} &= \frac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n , $w_n > 0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1 + v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n , $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_1^e [\ln(x)]^n dx$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

Exercice 56 - Amérique du Sud Jour 2 (22 novembre 2024)

Cet exercice contient 5 affirmations.

Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1** : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.
2. **Affirmation 2** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. **Affirmation 3** : La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E) .
2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.
3. **Affirmation 5** : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur $2e^{\frac{3}{2}}$.