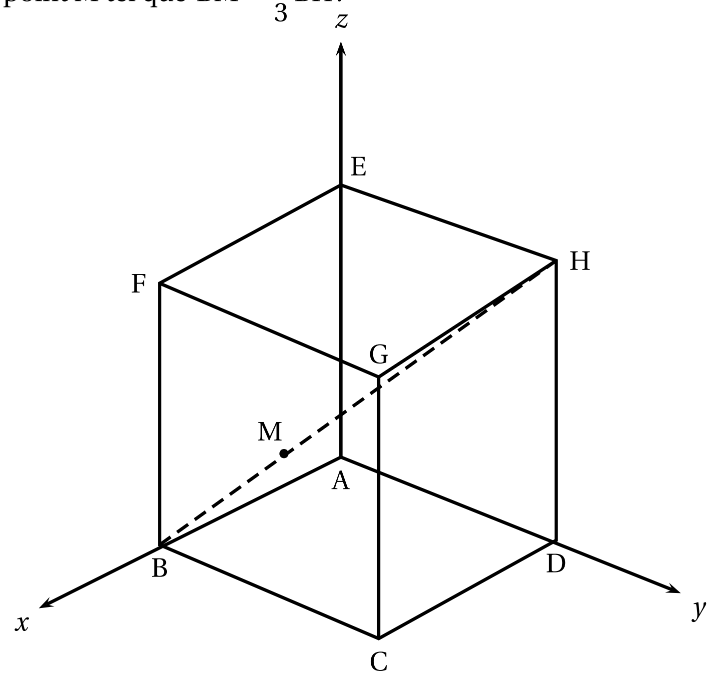
Recueil d'exercices du Baccalauréat sur la Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 - Polynésie jour 1 (2 juin 2021)

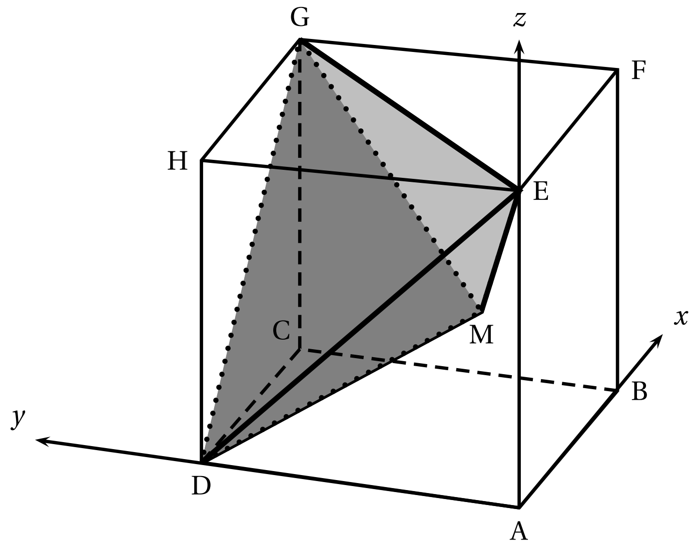
Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère le point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BH}}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. **a.** Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
   b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.
   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
4. **a.** Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$ est normal au plan (EGD).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.
   c. Soit $\mathscr{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{2}{3} - t \\ y & = & \frac{1}{3} + t \\ z & = & \frac{1}{3} + t \end{array}\right. , \; t \in \mathbb{R}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.
Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

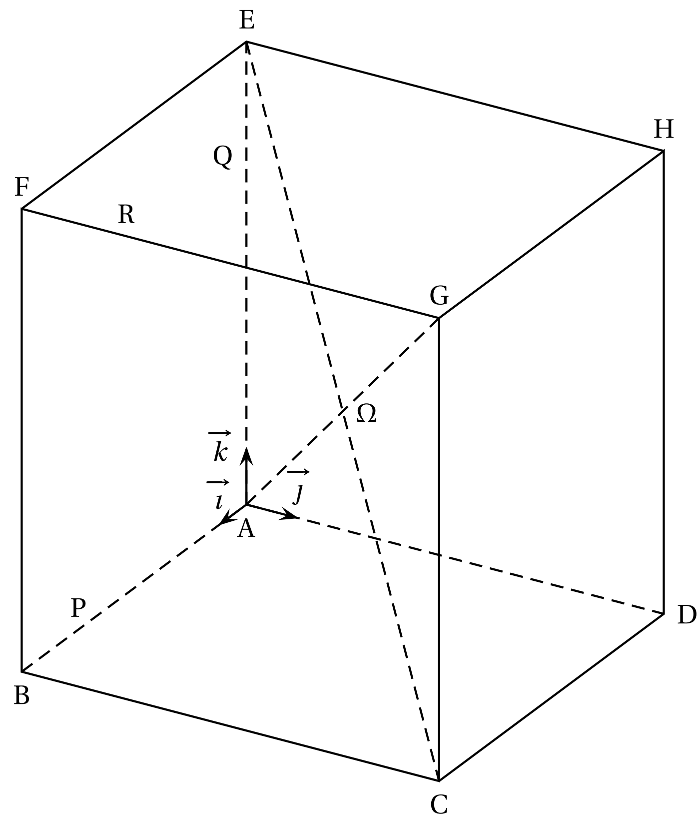
b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{b \times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*

EXERCICE 2 - Asie jour 1 (7 juin 2021)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cmet de centre Ω.

Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;2\,;8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,-5\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

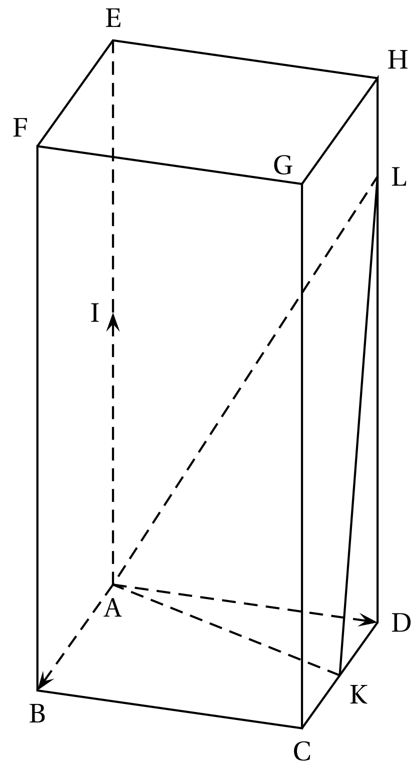
Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;4\,;4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\dfrac{14}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{14}{3}$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

EXERCICE 3 - Asie jour 2 (8 juin 2021)

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0 ; 1 ; \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6 ; -3 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

   c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

   d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} ; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

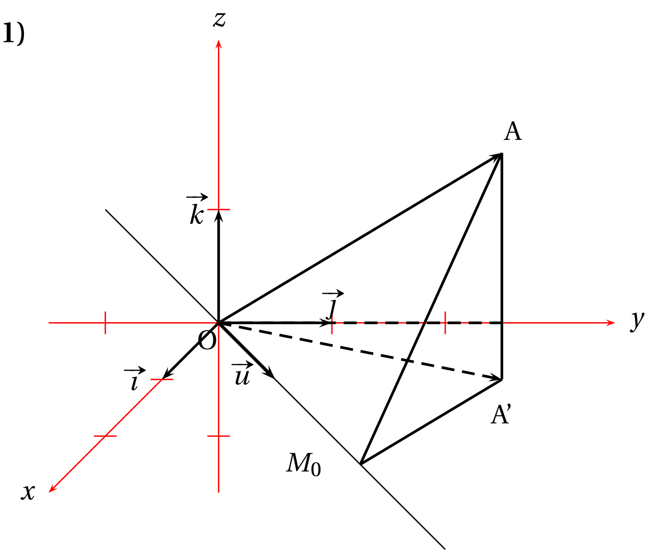
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

   b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

   c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

EXERCICE 4 - Métropole jour 1 (7 juin 2021)



Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,0)$.

Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

EXERCICE 5 - Centres Etrangers jour 1 (8 juin 2021)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- La droite $\mathscr{D}$ passant par les points $\text{A}(1 ; 1 ; -2)$ et $\text{B}(-1 ; 3 ; 2)$.
- La droite $\mathscr{D}'$ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4+3t \\ y &=& 6-3t \\ z &=& 8-6t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+my-2z+8=0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathscr{D}'$?

a. $\text{M}_1(-1 ; 3 ; -2)$ **b.** $\text{M}_2(11 ; -9 ; -22)$ **c.** $\text{M}_3(-7 ; 9 ; 2)$ **d.** $\text{M}_4(-2 ; 3 ; 4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ est :

a. $m=-1$ **a.** $m=1$ **c.** $m=5$ **d.** $m=-2$

EXERCICE 6 - Centres Etrangers jour 2 (9 juin 2021)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\,;\,-1\,;\,0), B(3\,;\,-1\,;\,2), C(0\,;\,4\,;\,1) \text{ et } S(0\,;\,1\,;\,4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2\,;2\,;3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

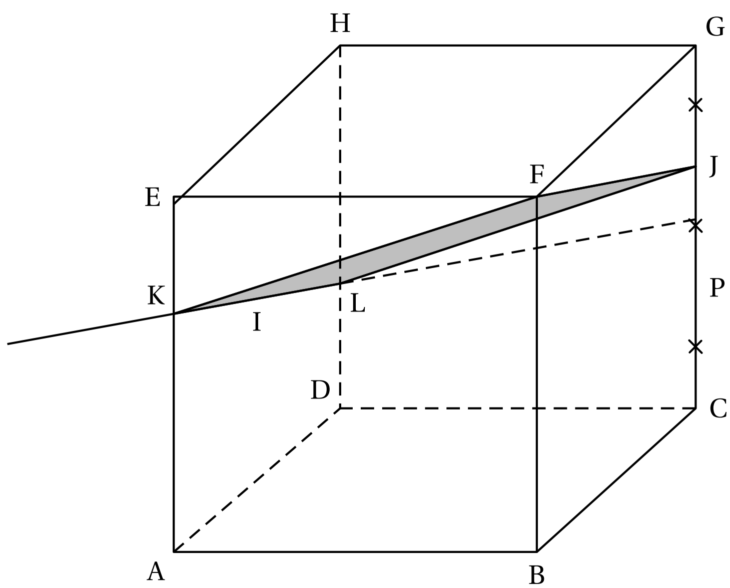
5. **a.** Calculer la longueur SA.

b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE 7 - Centres Etrangers candidats libres jour 2 (10 juin 2021)

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].
Il existe donc $a \in [0\ ;\ 1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. a. Montrer que le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$ est le point K.
   b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. a. Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
   b. Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.
   c. Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0\ ;\ 0\ ;\ 1 - \dfrac{a}{2}\right)$ et $L\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0\ ;\ 1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2. Montrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un carré ? Justifier.

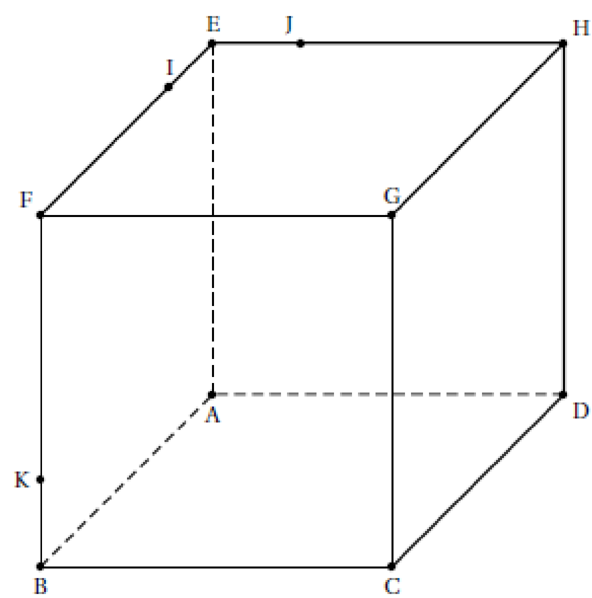
EXERCICE 8 - Métropole (13 septembre 2021)

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.
On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{\text{RI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{EH}}, \qquad \overrightarrow{\text{EJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{EF}}, \qquad \overrightarrow{\text{BK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BF}}$$

Les points I, J et K sont représentés sur la figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (IJK).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).
6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).
7. Soit $\text{M}\left(\frac{1}{4} ; 1 ; 0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.



EXERCICE 9 - Métropole jour 2 (13 septembre 2021)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0),

C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ;
   Réponse B : N(−3 ; −4 ; 6) ;
   Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ;
   Réponse D : Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

   Réponse A : $\begin{pmatrix}1,5\\0,5\\1\end{pmatrix}$;
   Réponse B : $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$;
   Réponse C : $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
   Réponse D : $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$
   Réponse B : $\left\{\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$
   Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$
   Réponse D : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

4. Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est :

   Réponse A : $x-2y+4z-6=0$;
   Réponse B : $2x+y-z+1=0$;
   Réponse C : $2x+y-z-1=0$;
   Réponse D : $y+2z-5=0$.

5. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

   Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ;
   Réponse B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
   Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ;
   Réponse D : les points A, B, C et D sont alignés.

EXERCICE 10 - Polynésie jour 1 (4 mai 2022)

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A$(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$ B$(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$, C$(6\ ;\ 6\ ;\ 1)$ et E$(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

2. **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan ABC.

b. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

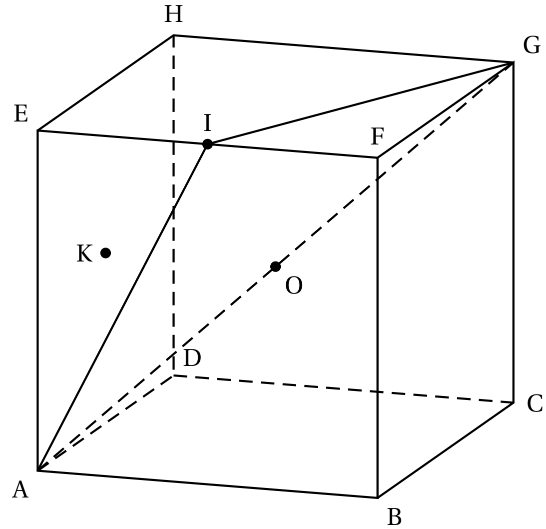
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.

d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16,5$ unités de volume.

EXERCICE 11 - Polynésie jour 2 (5 mai 2022)

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B *au plan (*AIG*).*

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.
   On admet que les points I et K ont pour coordonnées $\text{I}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $\text{K}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).
5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $\text{L}\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. **a.** Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
   b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.
2. On admet que $\text{AI} = \text{IG} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $\text{AG} = \sqrt{3}$.
   Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.
3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

EXERCICE 12 - Métropole jour 1 (11 mai 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1 ; 1 ; 3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

   b. Montrer que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

   a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

   b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9} ; \dfrac{19}{9} ; \dfrac{16}{9}\right)$.

   c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

   b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\dfrac{8}{9}$.

   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

EXERCICE 13 - Centres Etrangers jour 1 (11 mai 2022)

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2 ; 0 ; 3),\ B(0 ; 2 ; 1),\ C(-1 ; -1 ; 2) \text{ et } D(3 ; -3 ; -1).$$

1. **Calcul d'un angle**
   - **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   - **b.** Calculer les longueurs AB et AC.
   - **c.** À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.
2. **Calcul d'une aire**
   - **a.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
   - **b.** Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   - **c.** En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$
   - **d.** Calculer l'aire du triangle ABC.
3. **Calcul d'un volume**
   - **a.** Soit le point $F(1 ; -1 ; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
   - **b.** Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
   - **c.** Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 14 - Métropole jour 2 (12 mai 2022)

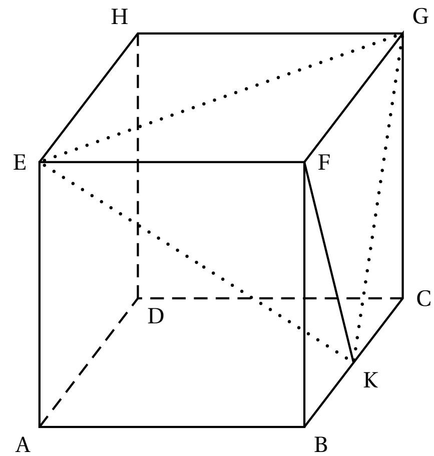
On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].

On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

EXERCICE 15 - Centres Etrangers jour 2 (12 mai 2022)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3 ; -2 ; 2), \quad B(6 ; 1 ; 5), \quad C(6 ; -2 ; -1) \quad \text{et } D(0 ; 4 ; -1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{A} \times h$$

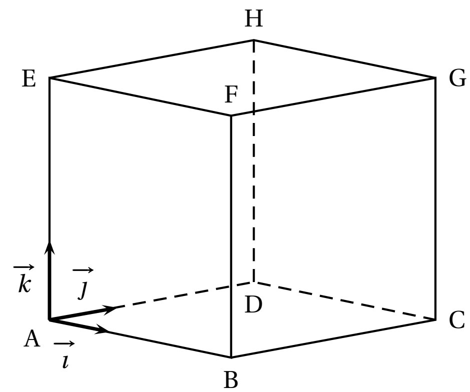
où $\mathscr{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
   c. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point H(5; 0; 1).
   a. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.
   b. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   c. En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.

EXERCICE 16 - Asie jour 1 (17 mai 2022)

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

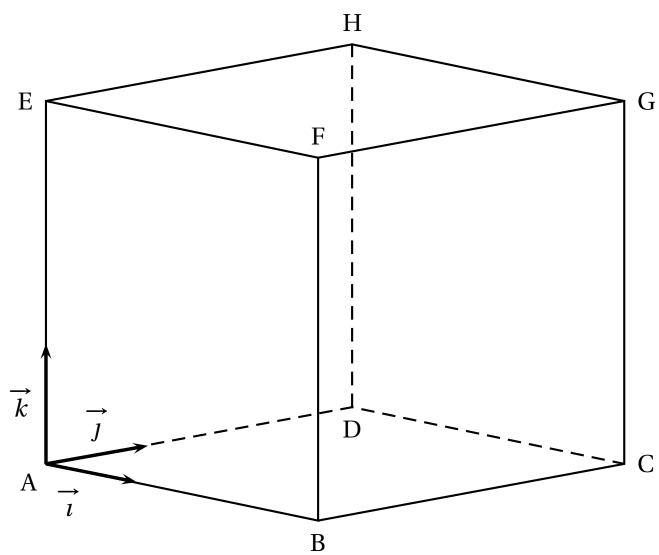
$$B(3 ; 0 ; 0), D(0 ; 3 ; 0) \text{ et } E(0 ; 0 ; 3).$$



On considère les points P(0; 0; 1), Q(0; 2; 3) et R(1; 0; 3).

1. Placer les points P, Q et R sur la figure en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.
3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.
4. On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).
   - **a.** Montrer que le vecteur $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ est normal au plan (PQR).
   - **b.** En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).
   - **c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).
   - **d.** Montrer que le point $L\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
   - **e.** Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).
5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$
6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.

ANNEXE à rendre avec la copie



EXERCICE 17 - Asie jour 2 (18 mai 2022)

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$A(-3 ; 1 ; 3), B(2 ; 2 ; 3), C(1 ; 7 ; -1), D(-4 ; 6 ; -1) \text{ et } K(-3 ; 14 ; 14).$$

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b. Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
   c. Calculer l'aire du rectangle ABCD.
2. **a.** Justifier que les points A, B et D définissent un plan.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
3. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
   b. Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
   c. Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.
4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

EXERCICE 18 - Centres Etrangers Groupe 1 jour 1 (18 mai 2022)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(5 ; 0 ; -1)$, $B(1 ; 4 ; -1)$, $C(1 ; 0 ; 3)$, $D(5 ; 4 ; 3)$ et $E(10 ; 9 ; 8)$.

1. **a.** Soit R le milieu du segment [AB].
Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0.$$

c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que $EA = EB$.

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + t \\ y & = & 1 + t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. **a.** Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 19 - Amérique du Nord jour 1 (18 mai 2022)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants :

$$J(2\,;\,0\,;\,1),\quad K(1\,;\,2\,;\,1)\text{ et }\quad L(-2\,;\,-2\,;\,-2)$$

1. **a.** Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.

   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2.

   c. Déterminer une valeur approchée au dixième près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Dans la suite, T désigne le point de coordonnées $(10\,;\,9\,;\,-6)$.

3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point T sur le plan (JKL).

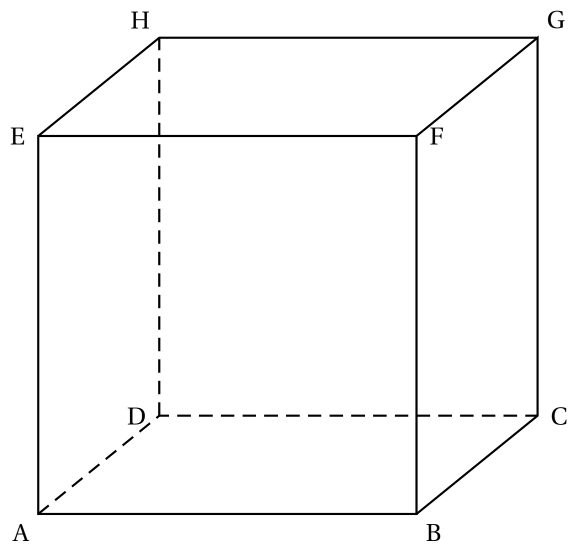
   c. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

   $$V = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h \text{ où } \mathscr{B} \text{ désigne l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur correspondante}$$

   Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3.

EXERCICE 20 - Centres Etrangers Groupe 1 jour 2 (19 mai 2022)

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.

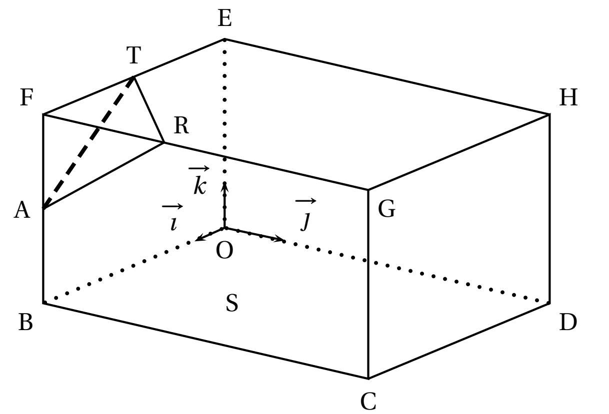


On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Justifier que les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires.
   b. Justifier que la droite (GH) est orthogonale au plan (EDH).
   c. En déduire que la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH).
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}$.
   Déduire de la question 1. c. qu'une équation cartésienne du plan (AGH) est :
$$y - z = 0.$$
3. On désigne par L le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EL).
   b. Déterminer l'intersection de la droite (EL) et du plan (AGH).
   c. Démontrer que le projeté orthogonal du point L sur le plan (AGH) est le point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
   d. Montrer que la distance du point L au plan (AGH) est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   e. Déterminer le volume du tétraèdre LAGH.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

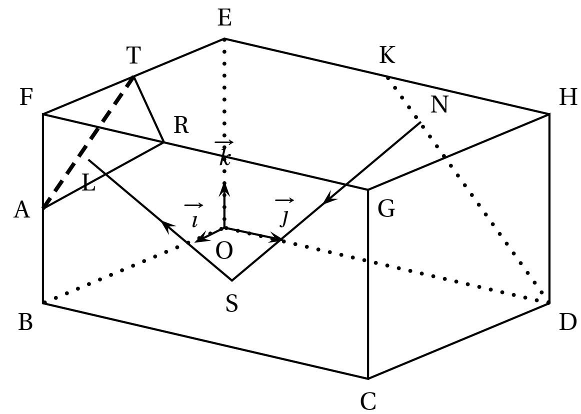
EXERCICE 21 - Amérique de Nord jour 2 (19 mai 2022)

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.
Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m.
On utilise le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier C(6 ; 8 ; 0), F(6 ; 0 ; 4) et G(6 ; 8 ; 4).
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets A(6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4) et T(3 ; 0 ; 4), Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

1. **a.** Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AT}$.
   c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.
2. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
   a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
   Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2k \\ y & = & \frac{5}{2}-2k \\ z & = & 3k \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{R}.$$
   b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).
   Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.
4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH].
   Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.

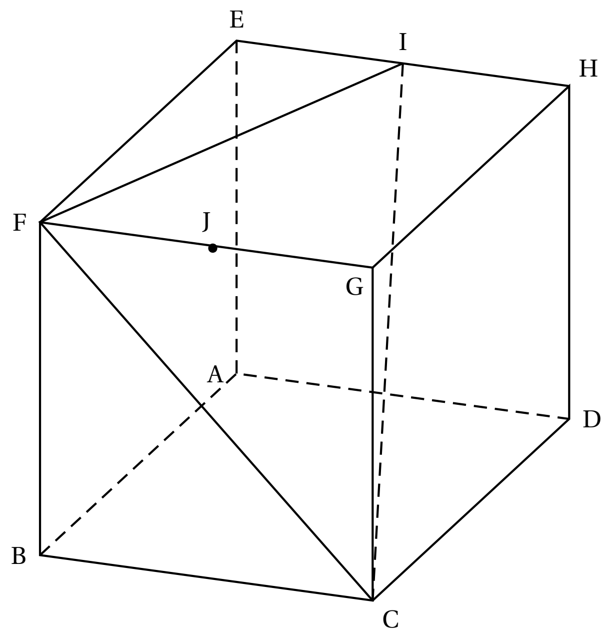


a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$, le point N de coordonnées $(0\ ;\ 8 - 4t\ ;\ 4t)$ est un point du segment [DK].

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

EXERCICE 22 - Polynésie jour 1 (30 août 2022)

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2};\,1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Démontrer que le point $\mathrm{K}\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{5}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V=\frac{1}{3}\times b\times h,$$

où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.

EXERCICE 23 - Métropole jour 1 (8 septembre 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1 ; -1 ; 3), \qquad B(1 ; 1 ; 2), \qquad C(1 ; -1 ; 7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1 ; 6 ; 8)$ et $E(11 ; -9 ; 2)$.

1. **a.** Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -1+4t \\ y & = & 6-5t \\ z & = & 8-2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

   b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

   c. Le point $F(1,36 ; -1,7 ; -0,7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

2. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

   b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

   c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x-5y-2z+5=0$.

3. **a.** Montrer que le point $G(7 ; -4 ; 4)$ appartient à la droite Δ.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).

   c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

4. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   b. Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.

EXERCICE 24 - Métropole jour 2 (9 septembre 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(2 ; 4 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 3+t\\ z &=& 3+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$.

b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M$'$ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M$'$ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M$'$ sont (3 ; 1 ; 1).

4. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Justifier que le point M a pour coordonnées (1 ; 2 ; 0).

c. Calculer la distance MM$'$.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

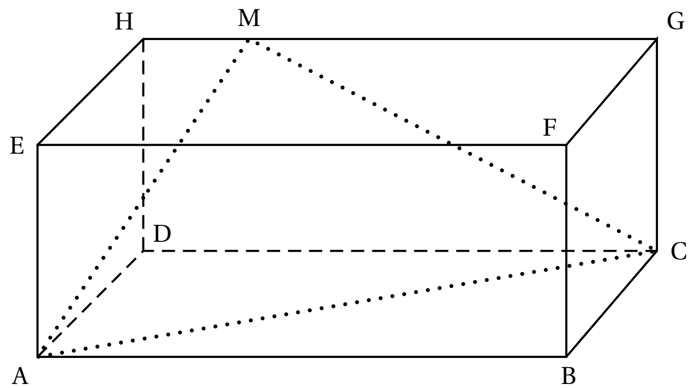
b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.

EXERCICE 25 - Amérique du Sud jour 1 (26 septembre 2022)

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que

$AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5\,;\,0\,;\,0)$, $(0\,;\,3\,;\,0)$ et $(0\,;\,0\,;\,2)$.



1. **a.** Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.

c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,0)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).

b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

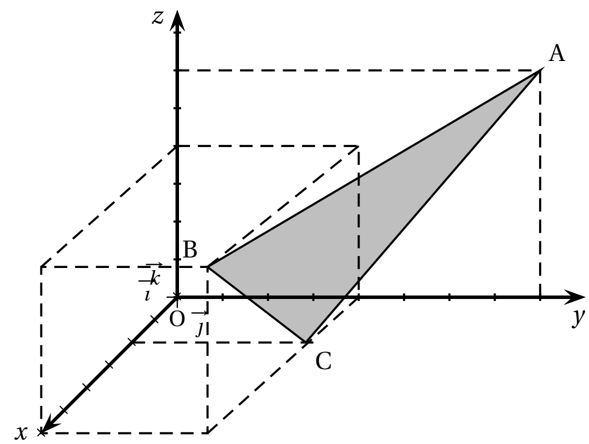
c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
Calculer la distance DP; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

EXERCICE 26 - Amérique du Sud jour 2 (27 septembre 2022)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

A(0 ; 8 ; 6), B(6 ; 4 ; 4) et C(2 ; 4 ; 0).



1. **a.** Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0\,;0\,;6)$ et $(6\,;6\,;0)$.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

   b. Montrer que le milieu I du segment [BC] appartient à la droite (DE).

3. On considère le triangle ABC.

   a. Déterminer la nature du triangle ABC.

   b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

   c. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

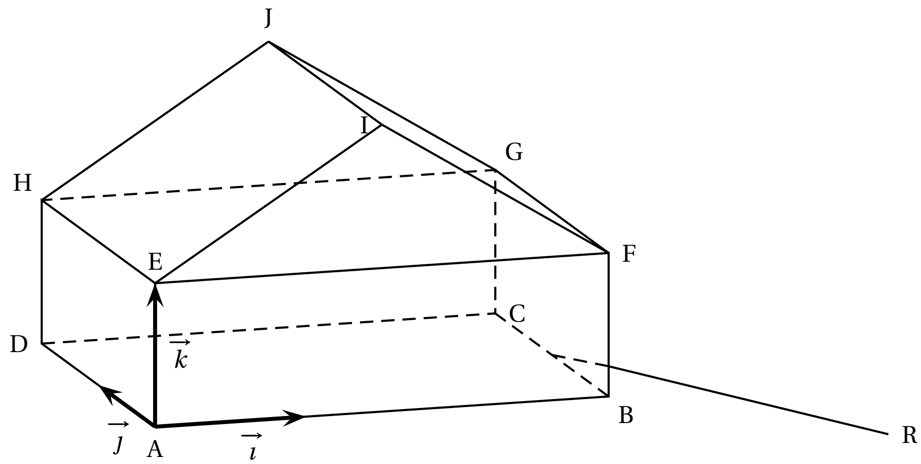
   d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,-\frac{5}{3}\right)$.

   Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
   En déduire la distance du point O au plan (ABC).

EXERCICE 27 - Nouvelle-Calédonie jour 1 (25 octobre 2022)

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est le triangle EIF isocèle en I.
Cette maison est représentée ci-dessous.

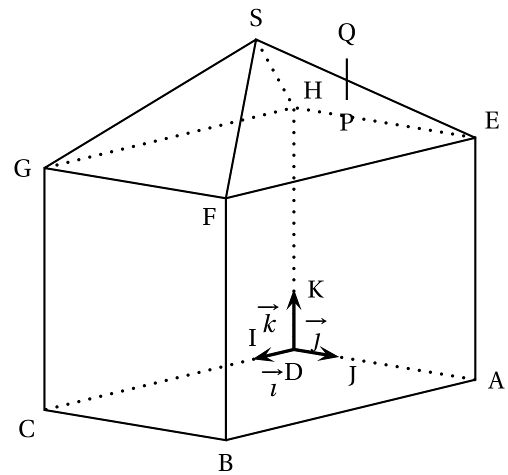


On a AB = 3, AD = 2, AE = 1.
On définit les vecteurs $\vec{\imath} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.
On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. Donner les coordonnées du point G.
2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;\,0\,;\,-3)$ est vecteur normal au plan (EHI).
   Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).
3. Déterminer les coordonnées du point I.
4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{\text{EIF}}$.
5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.
   Le relais est représenté par le point R de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,-1)$.
   La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-3\,;\,4\,;\,1)$. On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête [BC].
   - **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   - **b.** On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$.
     Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG).
     Déterminer les coordonnées du point K.
   - **c.** Le point K appartient-il bien à l'arête [BC] ?

EXERCICE 28 - Nouvelle-Calédonie jour 2 (26 octobre 2022)

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.
On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.
Soit les points I, J et K tels que
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.
On note $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{DK}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.
4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :

   - le point P appartient au plan (EFS) ;
   - le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
   - la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{k}$.

   a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2\\ y &=& 3\\ z &=& 5{,}5+t\end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R})$$

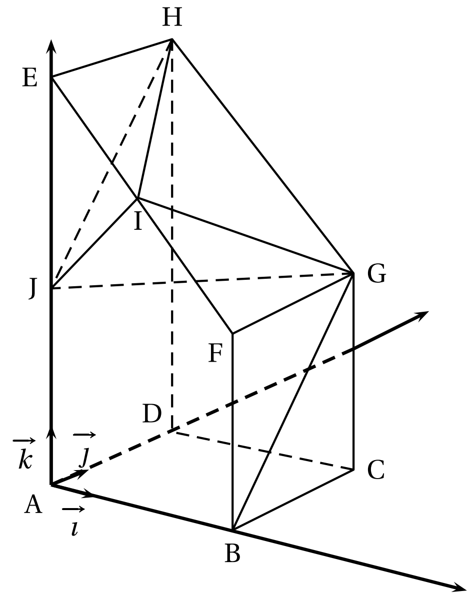
   b. En déduire les coordonnées du point P.

   c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.
5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -4+6s\\ y &=& 7-4s\\ z &=& 2+4s\end{array}\right. \qquad (s\in\mathbb{R})$$

   Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
   L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

EXERCICE 29 - Centres Etrangers Groupe 1 jour 1 (13 mars 2023)



On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.

On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).

   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\ \frac{4}{3}\,;\ \frac{16}{3}\right)$.

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

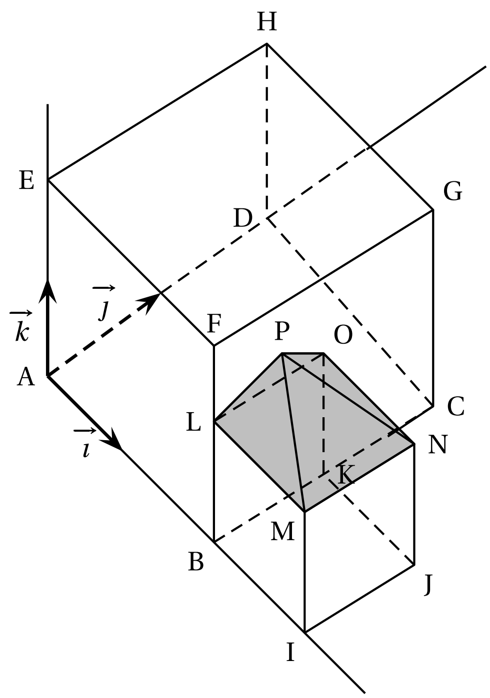
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

EXERCICE 30 - Centres Etrangers Groupe 1 jour 2 (14 mars 2023)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$.
3. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.
   b. Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
   c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?
4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

EXERCICE 31 - Polynésie jour 1 (13 mars 2023)

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- d_1 la droite passant par le point $\mathrm{H}(2\,;3\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2k-3\\ y &=& k\\ z &=& 5\end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. **a.** Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.
b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

2. **a.** Vérifier que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x+4y-z-22=0.$$

Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point $\mathrm{M}(3\,;3\,;5)$.

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M.
Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -r+3\\ y &=& 2r+3\\ z &=& 3r+5\end{array}\right. \quad \text{où } r \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

EXERCICE 32 - Polynésie jour 2 (14 mars 2023)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- le point $\text{A}(1\,;\,-1\,;\,-1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x+2y+4z=17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x+14y+3z=19$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3. **a.** Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.

b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.

4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t\,;\,-t\,;\,3-2t)$.
On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe $\text{A}M^2$, soit $f(t)=\text{A}M^2$.

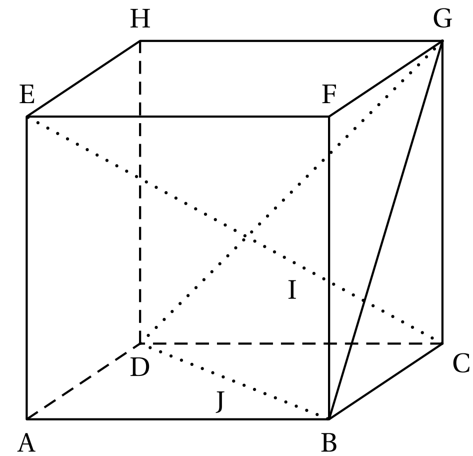
a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t)=9t^2-18t+17$.

b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.

5. On note H le point de coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

EXERCICE 33 - Métropole jour 1 (20 mars 2023)

On considère le cube ABCDEFCH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est :

$$x + y - z - 1 = 0.$$

b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{1}{3}\right)$.

c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. **a.** Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

b. Calculer l'aire du triangle BDG.
On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ *où* B *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *est la hauteur relative à cette base.*

EXERCICE 34 - Métropole jour 2 (21 mars 2023)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point $\mathrm{B}(1\,;\,1\,;\,2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.

Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 0\\ y &=& -2+t\\ z &=& t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On considère le point $\mathrm{A}(1\,;\,1\,;\,1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;\,-2+t\,;\,t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $\mathrm{A}M_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

b. En déduire que $\mathrm{AH} = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

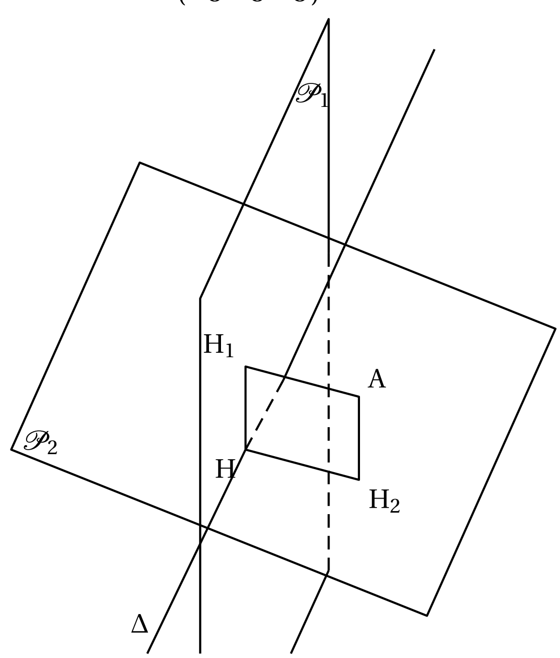
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

Montrer que $\mathrm{AH_1HH_2}$ est un rectangle.



EXERCICE 35 - Centres Etrangers jour 1 (21 mars 2023)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1 ; -3 ; 2), \qquad B(3 ; -2 ; 6) \quad \text{et} \quad C(1 ; 2 ; -4).$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est $13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point F$(15 ; -16 ; -8)$ et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.
   Démontrer que le point E a pour coordonnées $(2 ; 0 ; 1)$.
5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.
6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathscr{D}$ dont la distance au plan $\mathscr{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 36 - Centres Etrangers jour 2 (22 mars 2023)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3;0;1), \qquad B(2;1;2) \quad \text{et} \quad C(-2 ; -5 ; 1).$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x+y-2z+5=0.$$

4. On considère le point S(1 ; −2 ; 4).
   Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
   Montrer que les coordonnées de H sont (0 ; −1 ; 2).
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.
   Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathscr{D}$.

EXERCICE 37 - Asie jour 1 (23 mars 2023)

On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.

Dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

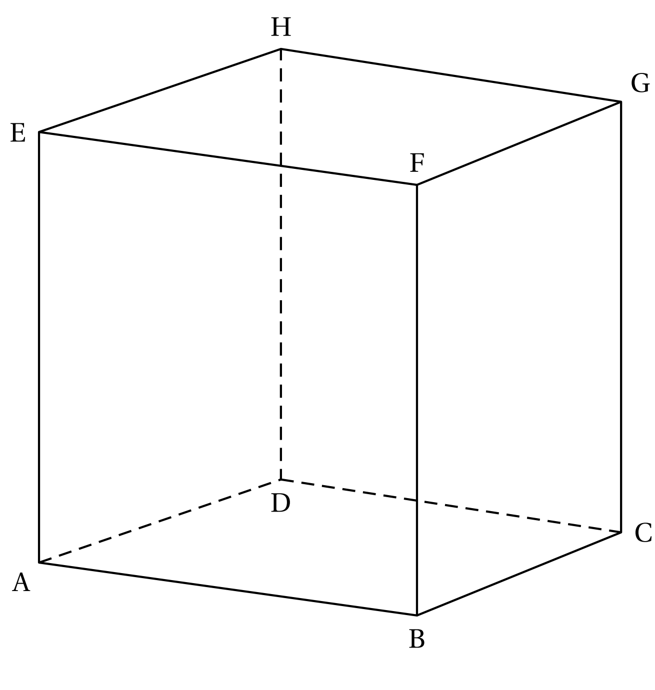
$$M\left(1 ; 1 ; \frac{3}{4}\right), \qquad N\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right), \qquad P\left(1 ; 0 ; -\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   b. Calculer l'aire du triangle MNP.
5. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(5 ; -8 ; 4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1; 0; 1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
   Montrer que les coordonnées du point L sont : $L\left(\frac{4}{7} ; \frac{24}{35} ; \frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $FL = \dfrac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

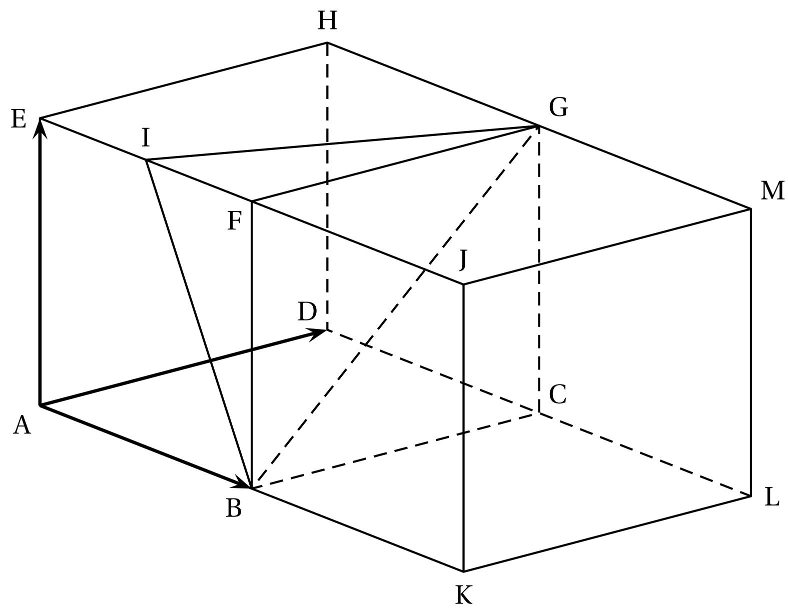
$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$

ANNEXE :



EXERCICE 38 - Asie jour 2 (24 mars 2023)

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$F(1\,;0\,;1),\qquad G(1\,;1\,;1)\quad \text{et}\quad J(2\,;0\,;1).$$

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\dfrac{1}{12}$ d'unité de volume.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$

2. Déterminer les coordonnées du point I.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ un vecteur normal au plan (BIG).

4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$.

5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale à (BIG) et passant par F.

6. **a.** La droite d coupe le plan (BIG) au point L′.

Montrer que les coordonnées du point L′ sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

b. Calculer la longueur FL′.

c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle IGB.

EXERCICE 39 - Amérique du Nord jour 1 (27 mars 2023)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1\,;\,2\,;\,5)$, $B(3\,;\,6\,;\,3)$, $C(3\,;\,0\,;\,9)$ et $D(8\,;\,-3\,;\,-8)$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. ABC est un triangle :

a. isocèle rectangle en A — **b.** isocèle rectangle en B

c. isocèle rectangle en C — **d.** équilatéral

2. Une équation cartésienne du plan (BCD) est :

a. $2x+y+z-15=0$ — **b.** $9x-5y+3=0$

c. $4x+y+z-21=0$ — **d.** $11x+5z-73=0$

3. On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-2y-2z+15=0$.

On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

On peut affirmer que :

a. $H(-2\,;\,17\,;\,12)$ — **b.** $H(3\,;\,7\,;\,2)$

c. $H(3\,;\,2\,;\,7)$ — **d.** $H(-15\,;\,1\,;\,-1)$

4. Soit la droite Δ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 5+t \\ y = 3-t \\ z = -1+3t \end{array}\right.$, avec t réel.

Les droites (BC) et Δ sont :

a. confondues — **b.** strictement parallèles

c. sécantes — **d.** non coplanaires

5. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y+2z-6=0$.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-2y-2z+15=0$.

On peut affirmer que :

a. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont strictement parallèles

b. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AB)

c. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AC)

d. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (BC)

EXERCICE 40 - Amérique du Nord jour 2 (28 mars 2023)

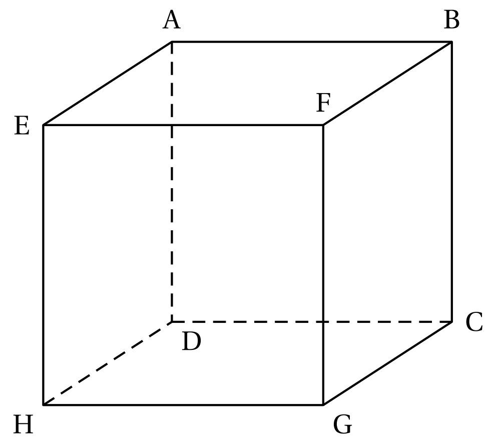
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3\ ;\ 1\ ;\ 5),\qquad E(3\ ;\ -2\ ;\ -1),\qquad F(-1\ ;\ 2\ ;\ 1),\qquad G(3\ ;\ 2\ ;\ -3).$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
   b. Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.
2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).
   b. On appelle H le point de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ -2)$.
   Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) .
   c. Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm^2.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG) .
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) .
   d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).
   À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.
4. **a.** Vérifier que la distance DK est égale à 5 cm.
   b. En déduire le volume du tétraèdre DEFG.

EXERCICE 41 - La Réunion jour 1 (28 mars 2023)

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que AB = 1.
On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\ \overrightarrow{DH},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DA}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.
2. Calculer les coordonnées des points M et N.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).
6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

   Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.
7. Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?

EXERCICE 42 - La Réunion jour 2 (29 mars 2023)

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère le point A(1 ; 1 ; 0) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x+4y+2z+1=0$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de (d).
2. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point B dont les coordonnées sont (1 ; -1 ; 1).
3. On considère le point C(1 ; −1 ; −1).
   - **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   - **b.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   - **c.** Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4. - **a.** Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.
   - **b.** Soit H le milieu du segment [BC].
     Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.
5. Soit D le point de coordonnées (0 ; −1 ; 1).
   - **a.** Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.
   - **b.** Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide ABCD.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par :

$$V=\frac{1}{3}\mathscr{B}\times h,$$

où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

EXERCICE 43 - Nouvelle-Calédonie jour 1 (28 août 2023)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'en-lève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}$.
Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^{x}$
b. $F(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{x}$
c. $F(x) = (2+x)\,\mathrm{e}^{x}$
d. $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{e}^{x}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+r\\ y &=& 1+r\\ z &=& -r \end{array}\right. \quad (r \in \mathbb{R}) \quad \text{et } (d_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-s\\ y &=& -1+s\\ z &=& 2-s \end{array}\right. \quad (s \in \mathbb{R})$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont :

a. sécantes.
b. strictement parallèles.
c. confondues.
d. non coplanaires.

3. On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est :

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+u\\ y &=& 4+u\\ z &=& 1-u \end{array}\right. \quad (u \in \mathbb{R})$$

La droite (Δ) est :

a. sécante et non orthogonale au plan (P).
b. incluse dans le plan (P).
c. strictement parallèle au plan (P).
d. orthogonale au plan (P).

4. On considère le plan (P_1) dont une équation cartésienne est $x - 2y + z + 1 = 0$, ainsi que le plan (P_2) dont une équation cartésienne est $2x + y + z - 6 = 0$.
Les plans (P_1) et (P_2) sont :

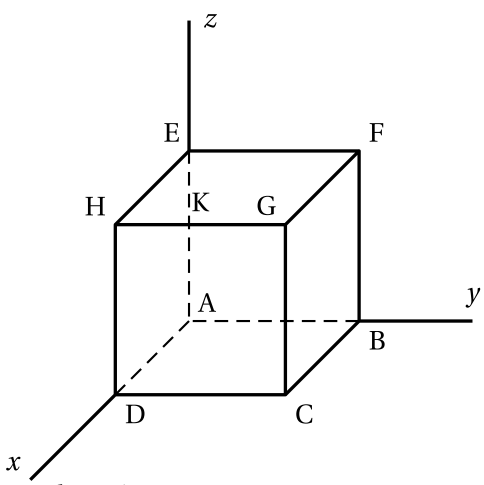
a. sécants et perpendiculaires.
b. confondus.
c. sécants et non perpendiculaires.
d. strictement parallèles.

5. On considère les points E$(1\,;2\,;1)$, F$(2\,;4\,;3)$ et G$(-2\,;2\,;5)$.
On peut affirmer que la mesure α de l'angle $\widehat{\mathrm{FEG}}$ vérifie :

a. $\alpha = 90°$
b. $\alpha > 90°$
c. $\alpha = 0°$
d. $\alpha \approx 71°$

EXERCICE 44 - Nouvelle-Calédonie jour 2 (29 août 2023)

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.
On note K le milieu du segment [HG].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.
2. **a.** Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.
   b. Calculer l'aire du triangle FGC.
   c. Calculer le volume du tétraèdre FGCK.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h,$$

où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

3. **a.** On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
   Démontrer que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (CFK).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est :

$$x + 2y + z - 3 = 0.$$

4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1+t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}))$$

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).
   a. Déterminer les coordonnées du point L.
   b. En déduire que $LG = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.
6. En utilisant la question 2., déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

EXERCICE 45 - Polynésie jour 1 (7 septembre 2023)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rap-porte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question traitée et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ dans lequel on considère :

- les points $\mathrm{A}(6\,;\,-6\,;\,6)$, $\mathrm{B}(-6\,;\,0\,;\,6)$ et $\mathrm{C}(-2\,;\,-2\,;\,11)$.
- la droite (d) orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (BC) et passant par le point A;
- la droite $\left(d'\right)$ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -6-8t \\ y &=& 4t, \\ z &=& 6+5t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 1

Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur directeur de la droite (d) ?

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\2\\0{,}2\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Question 2

Parmi les équations suivantes, laquelle est une représentation paramétrique de la droite (AB) ?

a. $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t+6 \\ y &=& -6 \\ z &=& t+6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t-6 \\ y &=& -6 \\ z &=& -t-6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t+6 \\ y &=& -t-6 \\ z &=& 6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t+6 \\ y &=& t-6 \\ z &=& 6 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

Question 3

Un vecteur directeur de la droite $\left(d'\right)$ est :

a. $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}-14\\4\\11\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{v_4}\begin{pmatrix}8\\4\\5\end{pmatrix}$

Question 4

Lequel des quatre points suivants appartient à la droite $\left(d'\right)$?

a. $\mathrm{M}_1(50\,;\,-28\,;\,-29)$ **b.** $\mathrm{M}_2(-14\,;\,-4\,;\,1)$

c. $\mathrm{M}_3(2\,;\,-4\,;\,-1)$ **d.** $\mathrm{M}_4(-3\,;\,0\,;\,3)$

Question 5

Le plan d'équation $x = 1$ a pour vecteur normal :

a. $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

EXERCICE 46 - Métropole jour 1 (11 septembre 2023)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(1\,;\,0\,;\,-1),\quad B(3\,;\,-1\,;\,2),\quad C(2\,;\,-2\,;\,-1)\quad \text{et}\quad D(4\,;\,-1\,;\,-2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 0 \\ y & = & 2+t \\ z & = & -1+t \end{array}\right. \text{, avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
   b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   Sur le plan $\mathscr{P}$, que représente le point C par rapport à D ?
   c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x+y-z-3=0$.
2. **a.** Calculer la distance CD.
   b. Existe-t-il un point M du plan $\mathscr{P}$ différent de C vérifiant $MD=\sqrt{6}$? Justifier la réponse.
3. **a.** Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
   Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.
   b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t=-2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
   c. En déduire la distance du point D à la droite Δ.

EXERCICE 47 - Métropole jour 2 (12 septembre 2023)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère :
les points A$(-1\,;\,-2\,;\,3)$, B$(1\,;\,-2\,;\,7)$ et C$(1\,;\,0\,;\,2)$;
la droite Δ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -4 + 3t \end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$;
le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x + 2y + z - 4 = 0$;
le plan $\mathscr{Q}$ d'équation cartésienne : $-6x - 4y - 2z + 7 = 0$.

1. Lequel des points suivants appartient au plan $\mathscr{P}$?
   a. $R(1\,;\,-3\,;\,1)$; **b.** $S(1\,;\,2\,;\,-1)$; **c.** $T(1\,;\,0\,;\,1)$; **d.** $U(2\,;\,-1\,;\,1)$.

2. Le triangle ABC est :
   a. équilatéral; **b.** rectangle isocèle;
   c. isocèle non rectangle; **d.** rectangle non isocèle.

3. La droite Δ est :
   a. orthogonale au plan $\mathscr{P}$; **b.** sécante au plan $\mathscr{P}$;
   c. incluse dans le plan $\mathscr{P}$; **d.** strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

4. On donne le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 20$.
   Une mesure au degré près de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ est :
   a. $34°$; **b.** $120°$; **c.** $90°$; **d.** $0°$.

5. L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est :
   a. un plan; **b.** l'ensemble vide;
   c. une droite; **d.** réduite à un point.

EXERCICE 48 - Amérique du Sud jour 1 (26 septembre 2023)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0;4;16), \quad B(0;4;-10), \quad C(4;-8;0) \quad \text{et} \quad K(0;4;3).$$

On définit la sphère S de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que KM = 13.

1. **a.** Vérifier que le point C appartient à la sphère S.
   b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On admet que la sphère S coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative.
   On note D celui qui a une abscisse positive.
   a. Montrer que le point D a pour coordonnées $(12;0;0)$.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
   c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).
4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.
   On rappelle la formule du volume V d'un tétraèdre

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h.$$

   où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

EXERCICE 49 - Amérique du Sud jour 2 (27 septembre 2023)

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

$$A(1 ; 1 ; -4), \quad B(2 ; -1 ; -3), \quad C(0 ; -1 ; -1) \quad \text{et} \quad \Omega(1 ; 1 ; 2).$$

1. Démontrer que les points A, B, et C définissent un plan.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z + 2 = 0$.

3. **a.** Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

On admet que $\Omega H = 2\sqrt{3}$.

On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = 2\sqrt{3}$.

4. Justifier, sans calcul, que tout point N du plan (ABC), distinct de H, n'appartient pas à la sphère S.

On dit qu'un plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $K \in \mathscr{P} \cap S$
- $(\Omega K) \perp \mathscr{P}$

5. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées K$(3 ; 3 ; 0)$.

Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S au point K.

6. On admet que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).

Déterminer une équation paramétrique de la droite (Δ).

EXERCICE 50 - Amérique du Nord jour 1 (21 mai 2024)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les quatre questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).
Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 3+t\\ y &=& 1\\ z &=& -3+3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$
b. $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1+4t\\ y &=& t\\ z &=& 3\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1+3t\\ y &=& t\\ z &=& 3-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$
d. $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 4+t\\ y &=& 1\\ z &=& 3-3t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique
$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 3+4t\\ y &=& 6t\\ z &=& 4-2t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. M(7 ; 6 ; 6) **b.** N(3 ; 6 ; 4) **c.** P(4 ; 6 ; −2) **d.** R(−3 ; −9 ; 7)

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique
$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& -2+3k\\ y &=& -1-2k\\ z &=& 1+k\end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{R}$
Les droites (d) et (d') sont :

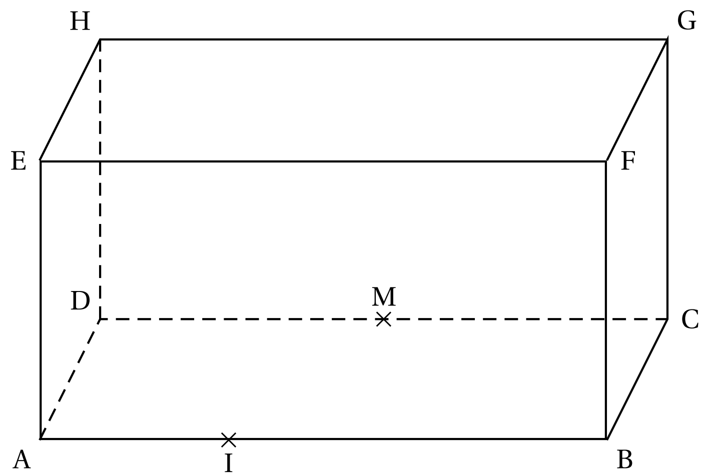
a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point I(2 ; 1 ; 0) et perpendiculaire à la droite (d).
Une équation du plan (P) est :

a. $2x+3y-z-7=0$
b. $-x+y-4z+1=0$
c. $4x+6y-2z+9=0$
d. $2x+y+1=0$

EXERCICE 51 - Amérique du Nord jour 2 (22 mai 2024)

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

   $$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

   c. Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).

   Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3\,;\ \frac{1}{4}\,;\ \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Exercice 52 - Centres Etrangers Jour 1 (5 juin 2024)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$.
On considère :

- les points $A(-2\,;\,0\,;\,2)$, $B(-1\,;\,3\,;\,0)$, $C(1\,;\,-1\,;\,2)$ et $D(0;0;3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 3t \\ z &=& 3+5t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+3s \\ y &=& -1-5s \\ z &=& 2-6s \end{array}\right.$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+3y+5z-8=0.$$

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. **a.** Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

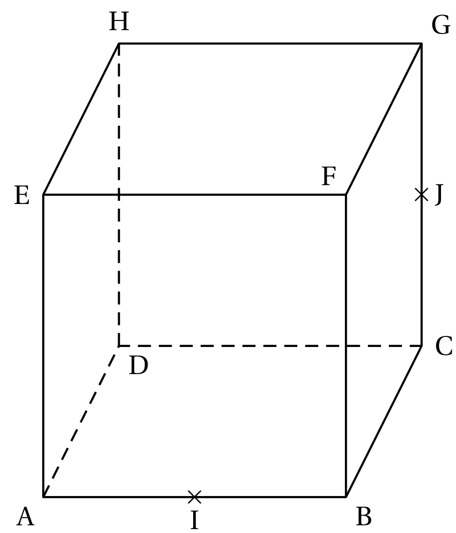
b. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

Exercice 53 - Centres Étrangers Jour 2 (6 juin 2024)

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x-2y+z+1=0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

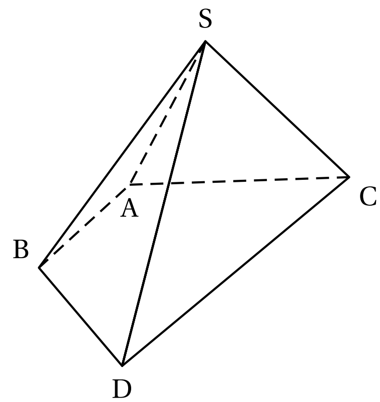
5. **a.** On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.

b. Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\dfrac{1}{6}$ cm^3.
On pourra utiliser le point L, *milieu du segment* [EF]. *On admet que ce point est le projeté orthogonal du point* I *sur le plan* (EFH).

c. Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

Exercice 54 - Asie Jour 1 (10 juin 2024)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3 ; −1 ; 1); B(4 ; −1 ; 0); C(0 ; 3 ; 2); D(4 ; 3 ; −2) et S(2 ; 1 ; 4).
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4. **a.** Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; −1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule
   $$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$
   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.
5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

Exercice 55 - Asie Jour 2 (11 juin 2024)

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P): \quad 2x+2y-3z+1=0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$\mathrm{A}(1\,;0\,;1)\ ,\ \mathrm{B}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)\ \text{et}\ \mathrm{C}(-4\ ;\ -6\ ;\ 5)\ .$$

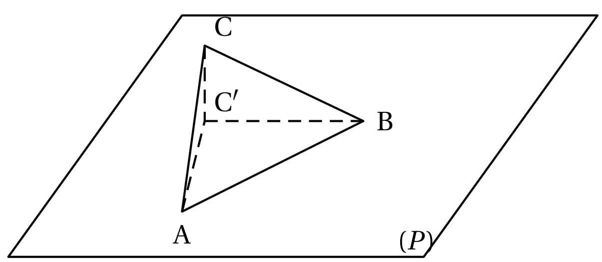
Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $\mathrm{C}'(0\ ;\ -2\ ;\ -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

   $$\begin{cases} \mathrm{H} \in (\mathrm{AB}) \\ (\mathrm{AB}) \text{ et } (\mathrm{HC}) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$

   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ sont : $\overrightarrow{\mathrm{HC}}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HC}}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $\mathrm{HC}' = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{\mathrm{CHC}'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. **a.** Montrer que les droites $(\mathrm{C}'\mathrm{H})$ et (AB) sont perpendiculaires.

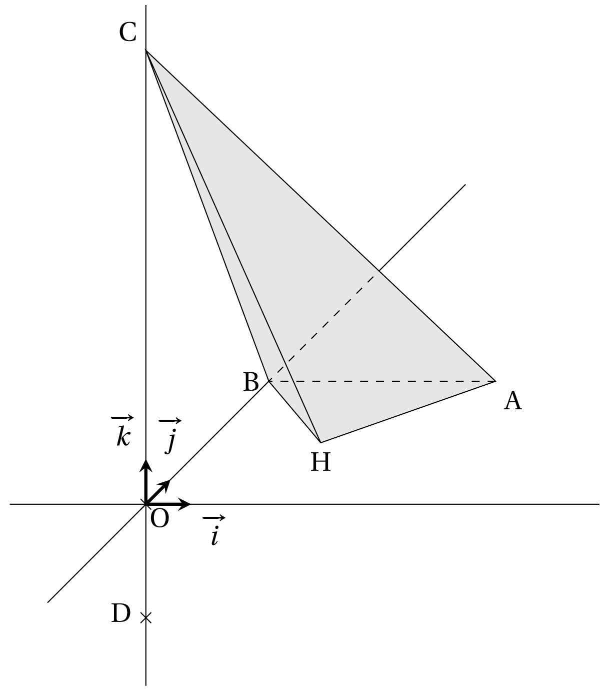
   b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.

   c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Exercice 56 - Métropole jour 1 (19 juin 2024)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points A(5 ; 5 ; 0), B(0 ; 5 ; 0), C(0 ; 0 ; 10) et $\mathrm{D}\left(0\,;\ 0\,;\ -\dfrac{5}{2}\right)$.



1. **a.** Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

   b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

   a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{2}\,;\ \dfrac{5}{2}\,;\ 0\right)$.

   b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. **a.** Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

   b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\dfrac{25}{4}$.

4. **a.** Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$*, où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Exercice 57 - Métropole jour 2 (20 juin 2024)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2\,;\,0\,;\,0),\qquad B(0\,;\,4\,;\,3),\qquad C(4\,;\,4\,;\,1),\qquad D(0\,;\,0\,;\,4)\quad \text{et}\quad H(-1\,;\,1\,;\,2)$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Exercice 58 - Polynésie jour 2 (20 juin 2024)

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2\,;\,5\,;\,1)$.

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points A(-1 ; -1 ; 17), B$(4\,;\,-2\,;\,4)$ et C$(1\,;\,-3\,;\,7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. **a.** Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x-3y+z-18=0$.

3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par

$$d : \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 3t+2\\ y &=& t+5\\ z &=& 4t+1\end{array}\right., \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

a. Déterminer un vecteur directeur de la droite d.

b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$. On admet que le point F$(6\,;\,-1\,;\,3)$ correspond à cet emplacement.

Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D.

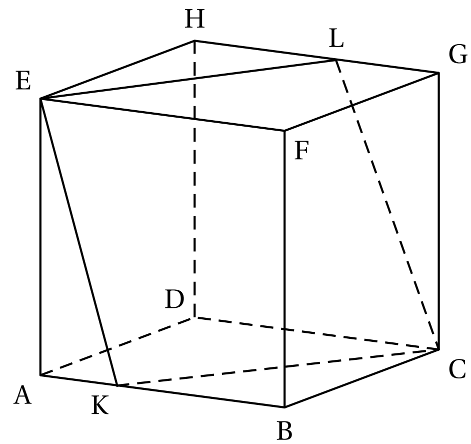
Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 m.s^{-1}, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

Exercice 59 - Polynésie Septembre (05 septembre 2024)

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0;\ 1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\ ;\ 0\ ;\ 0) \quad \text{et} \quad L(1-m\ ;\ 1\ ;\ 1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.

2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point $L(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est confondu avec le point G, le point $K(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de $CKEL$ en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

- **a.** Démontrer que $CKEL$ est un parallélogramme.
- **b.** Justifier que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE} = m(m-1)$.
- **c.** Démontrer que $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.

4. Dans cette question, $m = \dfrac{1}{2}$.Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$.

- **a.** Démontrer que le parallélogramme CKEL est alors un losange.
- **b.** À l'aide de la question **3. b.**, déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

Exercice 60 - Métropole Jour 2 sujet dévoilé (20 juin 2024)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(0 ; 4 ; -1), \quad \text{B}(6; 1; 5) \quad \text{et} \quad \text{C}(6 ; -2 ; -1).$$

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 3-t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite(AB) est

$$2x+2y-z-9=0.$$

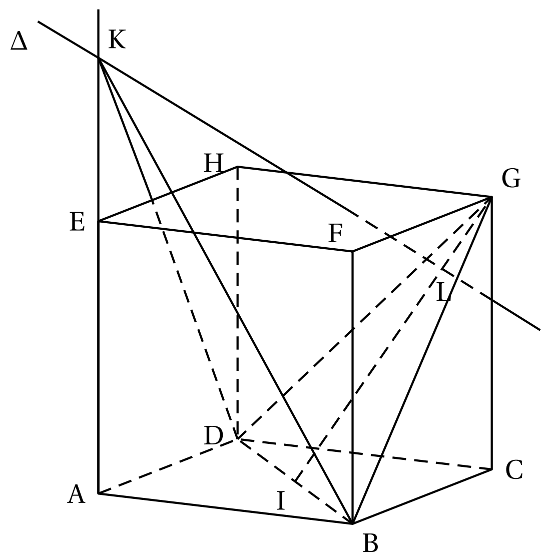
On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R} ; \quad \mathscr{D}' \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t' \\ y & = & 4-t' \\ z & = & -1+2t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 60 - Métropole Remplacement (11 septembre 2024)

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.
   Aucune justification n'est attendue.

   b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\,;\ \frac{7}{8}\,;\ \frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

   a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{7}{8} + t \\ y & = & \frac{7}{8} + t \\ z & = & \frac{3}{4} - t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

   b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;\ 0\,;\ \frac{13}{8}\right)$.

   c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.

4. **a.** Calculer la distance KL.

   b. On admet que le triangle DBG est équilatéral.

   Montrer que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.

   On rappelle que :

   - le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative a cette base ;
   - un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0~;~0~;~a)$.

   a. Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

   b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t'\\ y &=& t'\\ z &=& -t' + a\end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

   On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

   Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}~;~\dfrac{a+1}{3}~;~\dfrac{2a-1}{3}\right)$.

   c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.

Exercice 61 - Amérique du Sud Jour 1 (21 novembre 2024)

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.
4. **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;\ -\dfrac{5}{3}\,;\ -\dfrac{2}{3}\right)$.

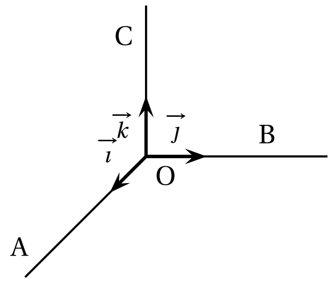
Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\ -\dfrac{4}{3}\,;\ -1\right)$.

5. **a.** Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

Exercice 62 - Amérique du Sud Jour 2 (22 novembre 2024)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC »,

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2 ; 3 ; 3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+3y+3z-6=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).
   Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\dfrac{1}{3}B\times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

Exercice 63 - Polynésie jour 1 (19 juin 2024)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\,;\,1\,;\,-1),\quad B(-1\,;\,2\,;\,1) \text{ et } \quad C(5\,;\,0\,;\,-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+5y-2z+3=0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -t+3 \\ y &=& t+2 \\ z &=& 2t+1 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment [BC], noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x-y-2z-7=0.$$

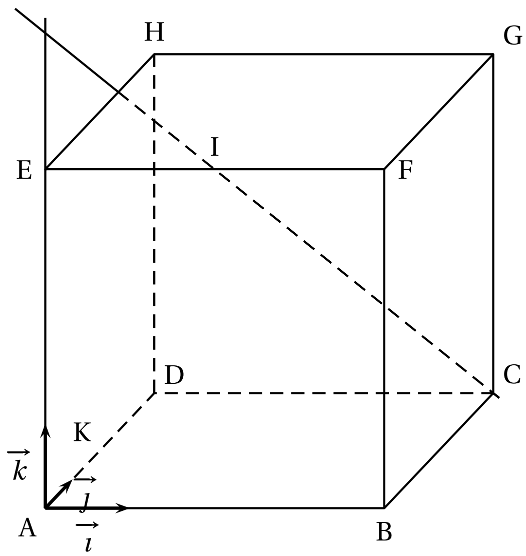
On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Exercice 64 - Métropole Jour 1 sujet secours (19 juin 2024)

On considère un repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points

$$B(4\,;0\,;0),\quad D(0\,;4\,;0),\quad E(0\,;0\,;4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2+2t \\ y &=& 4t \\ z &=& 4-4t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (IC).
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$x+2y-2z-4=0.$$

   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\dfrac{28}{9}\,;\,\dfrac{20}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$.
   Que représente J par rapport à C ?
   c. Vérifier que le point K(0 ; 2 ; 0) appartient au plan $\mathscr{P}$.
   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).
4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V=\dfrac{B\times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.

b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}$.

d. On note I$'$ un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I$'$ C) passant par G.

Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

EXERCICE 65 : AMÉRIQUE DU NORD J1 (21 MAI 2025)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3-2t \\ y &=& -1 \\ z &=& 2-6t \end{array}\right., \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- $A(3~;~-3~;~-2)$
- $B(5~;~-4~;~-1)$
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3z-7=0$

Affirmation 1
La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2
Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x+3z+3=0$$

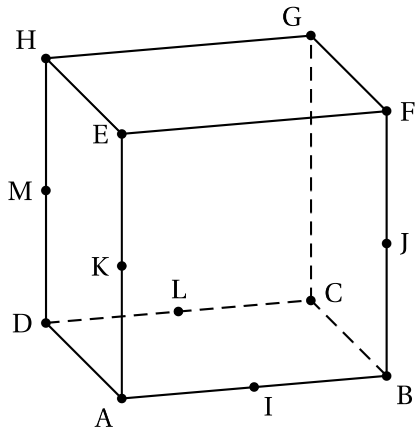
Affirmation 3
Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Affirmation 4
La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

EXERCICE 66 : AMÉRIQUE DU NORD J2 (22 MAI 2025)

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »
Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AG}\right)$ est une base de l'espace. »
Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\dfrac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $A(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et $B(5\ ;\ -3\ ;\ 7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »
Affirmation 5 : « Le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x+y-3z+34 = 0$ »
Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. »
On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -12+2k \\ y & = & 6 \\ z & = & 3-5k \end{array}\right. ,\text{où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

EXERCICE 67 : AMÉRIQUE DU NORD J2 SECOURS (22 MAI 2025)

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-\ t \\ y & = & -2+3t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x-3y+z-6=0$.

1. **Affirmation :** La droite D′, qui a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=2+2t \\ y=4-6t \\ z=9-8t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, est parallèle à la droite D.

2. On admet que les points A(−2 ; 3 ; 1), B(1 ; 3 ; −4) et C(6 ; 3 ; 9) ne sont pas alignés.

   Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A, B et C.

3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4+2t' \\ y & = & 1-3t' \\ z & = & 2+\ t' \end{array}\right.$ $t' \in \mathbb{R}$

4. **Affirmation :** Le point F(−3 ; −3 ; 3) est le projeté orthogonal du point E(−5 ; 0 ; 2) sur le plan P.

5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x+y-a^2z+3=0$ soit parallèle à la droite D.

Note du rédacteur : pour certaines questions, il est indispensable que le repère soit orthonormé.