Recueil d'exercices du Baccalauréat sur les Fonctions logarithmes népériens

EXERCICE 1 - Polynésie jour 1 (2 juin 2021)

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln x.$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;\,4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

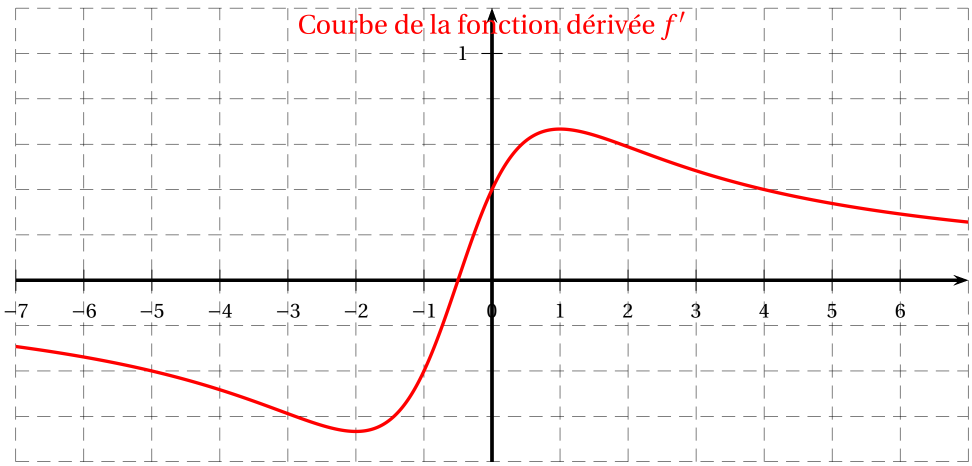
3. **a.** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

EXERCICE 2 - Asie jour 1 (7 juin 2021)

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. **a.** Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

EXERCICE 3 - Asie jour 2 (8 juin 2021)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, complété par les limites.

   c. Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.

EXERCICE 4 - Métropole jour 2 (8 juin 2021)

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1-2|n(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ et vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
   On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\alpha)$.
   On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

EXERCICE 5- Centres Etrangers jour 2 (10 juin 2021)

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0,05$.
On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes ($n \geqslant 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange.
Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

   Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n+1$
$P(X_n = x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?

   Montrer que $E(X_n) = n+1-n\times 0,95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.

   Montrer que f est décroissante sur $[20\,;\,+\infty[$.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20\,;\,+\infty[$.

   Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[20\,;\,+\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages.
La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.
En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

EXERCICE 6 - Métropole (13 septembre 2021)

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;\,+\infty[$.
   Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

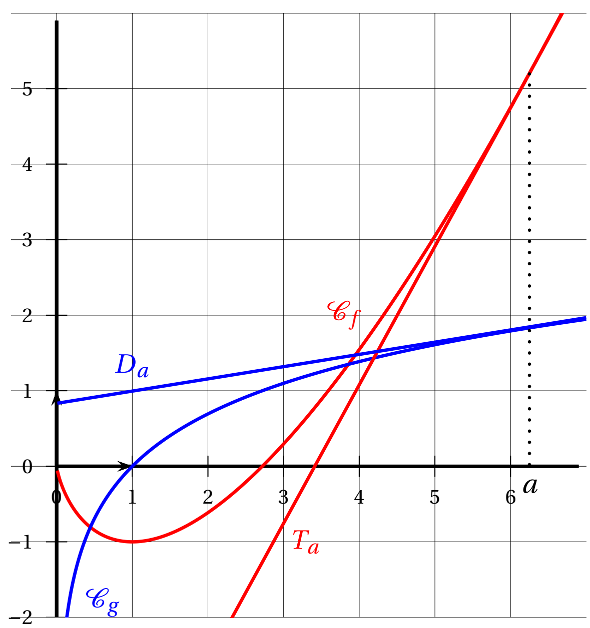
Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x; \qquad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
Pout tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a;
- D_a la tangente à $\mathscr{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

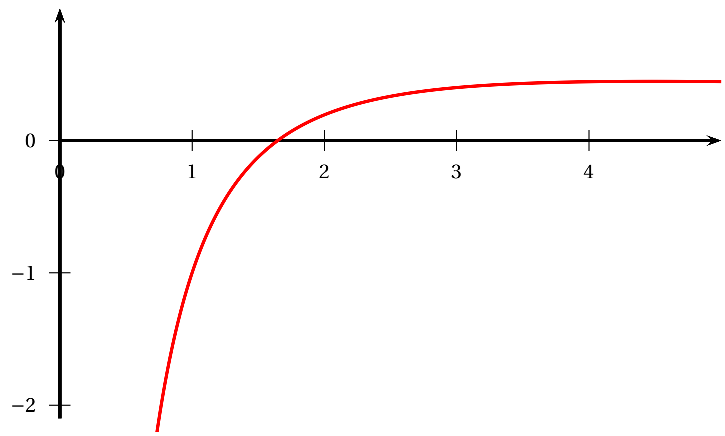
   On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.
3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

EXERCICE 7 - Métropole jour 2 (13 septembre 2021)

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

EXERCICE 8 - Centres Etrangers jour 2 (12 mai 2022)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les limites.

c. Justifier que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geqslant x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

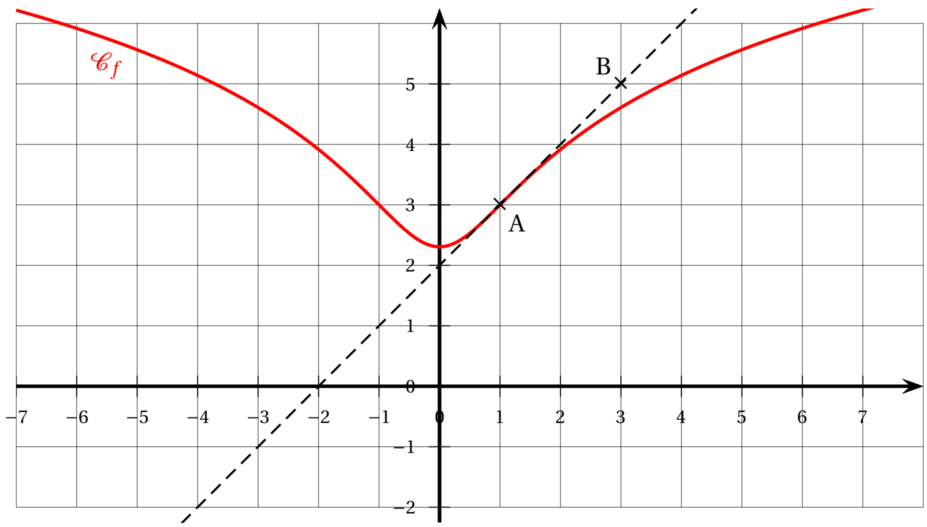
a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 9 - Asie jour 1 (17 mai 2022)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A$(1\,;\,3)$ et B$(3\,;\,5)$.
On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3+\ln 2$.

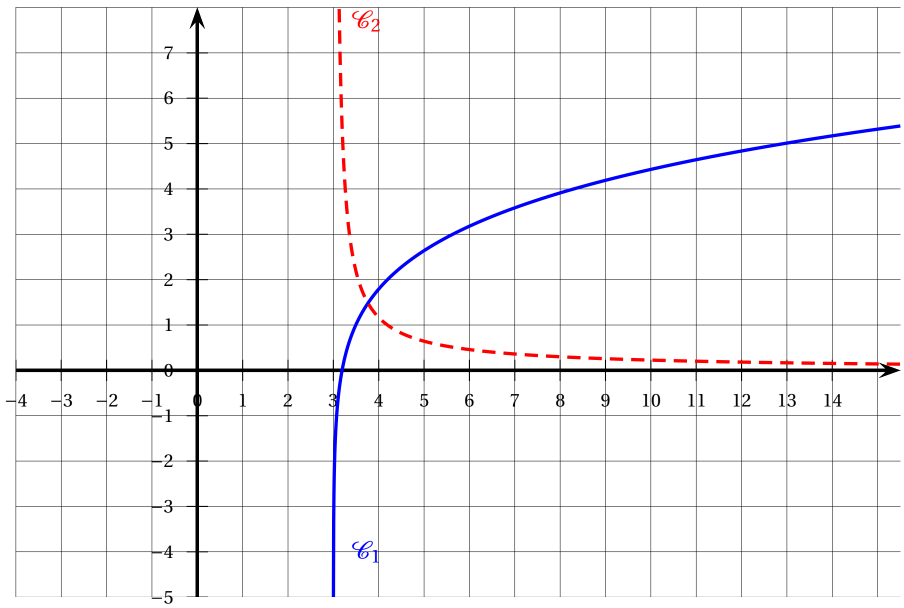
Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

EXERCICE 10 - Asie jour 2 (18 mai 2022)

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\,;\,+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.
   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5\,;\,6[$.
   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. **a.** Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{\left(x^2 - x - 6\right)^2}$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur I.

EXERCICE 11 - Polynésie jour 1 (30 août 2022)

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

a. la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$;

b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la partie 1, étudier :

a. la convexité de la fonction f ;

b. les variations de la fonction f.

3. a. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0\ ;\ \mathrm{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1.$$

EXERCICE 12 - Métropole jour 1 (8 septembre 2022)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   - **a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
   - **b.** Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   - **c.** Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
3. Soit k un nombre réel positif ou nul.
   - **a.** Montrer que, si $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.
   - **b.** Si $k > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que f est solution de l'équation :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).

EXERCICE 13 - Métropole jour 2 (9 septembre 2022)

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n\ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5\,;\,1]$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

EXERCICE 14 - Amérique du Sud jour 1 (26 septembre 2022)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

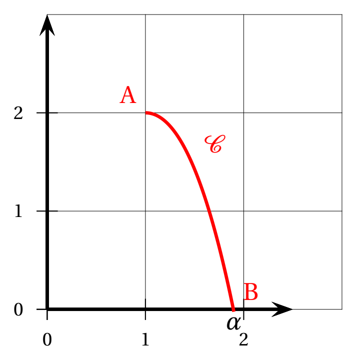
PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
   Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.

   a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$, $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha - 1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$.



EXERCICE 15 - Amérique du Sud jour 2 (27 septembre 2022)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

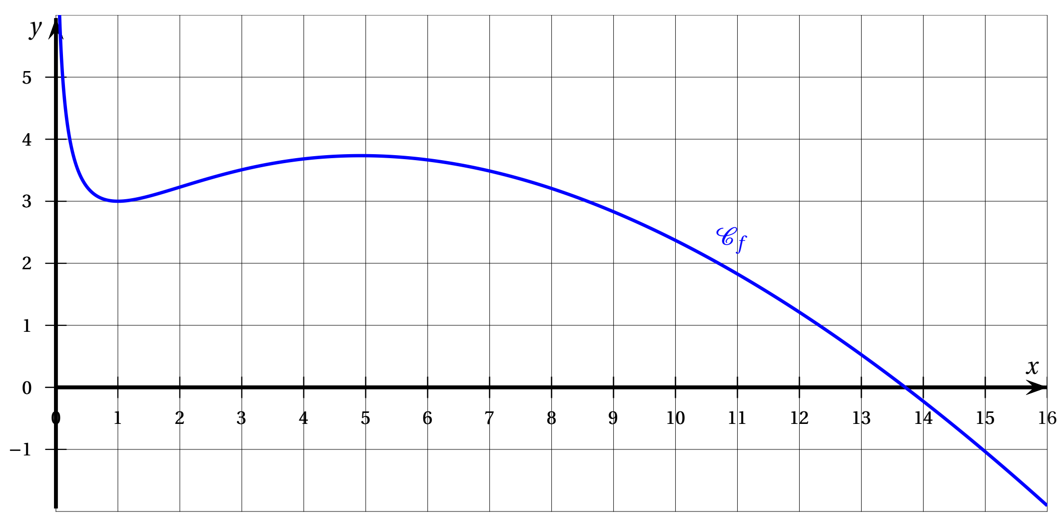
1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.

2. **a.** Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 16 - Nouvelle-Calédonie jour 1 (26 octobre 2022)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;\,5]$.
4. On admet que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
   b. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,;\,f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.
   Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t\,;\,f(t))$.
   En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment $[\mathrm{A}M]$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 17 - Nouvelle-Calédonie jour 2 (27 octobre 2022)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

   c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.
2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en 0.

   b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On note α cette solution.

   b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4{,}3\,;\,4{,}4[$.

   c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
   On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def  seuil(pas) :
     x=4.3
     while x*log (x) - x - 2 < 0:
       x=x+pas
     return x
```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 18 - Centres Etrangers jour 2 (14 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\,;\,\alpha]$ alors $f(x) \in [-1\,;\,\alpha]$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

   $$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 19 - Métropole jour 1 (20 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
   En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x}$.
4. Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).
6. On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

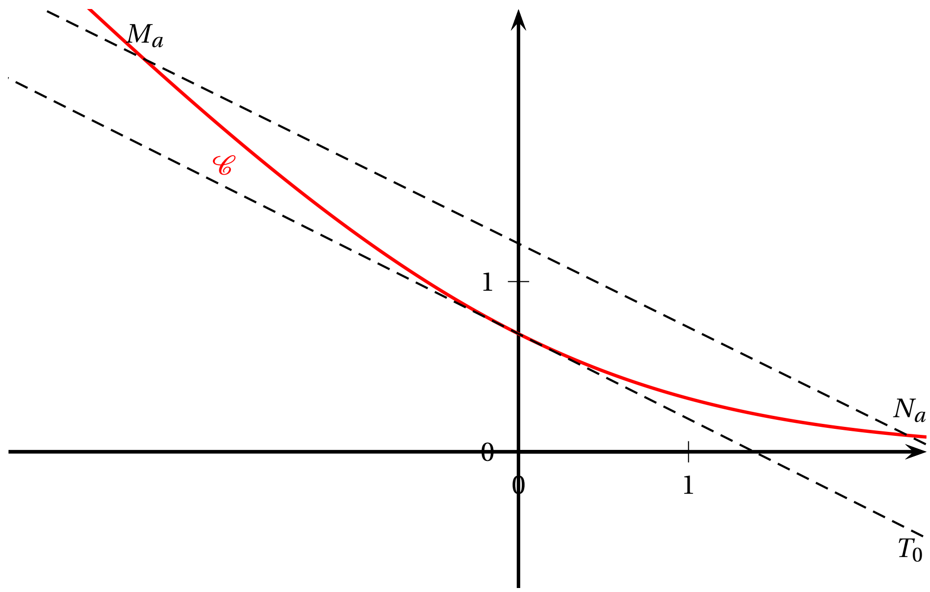
   $$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 20 - Métropole jour 2 (21 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$,

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

   d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
   a. Déterminer une équation de la tangente T_0.
   b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :
   $$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$
3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
   On a donc : $M_a\left(-a\,;\,f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;\,f(a)\right)$.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
   b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

EXERCICE 21 - Centres Etrangers jour 1 (21 mars 2023)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 22 - Centres Etrangers jour 2 (22 mars 2023)

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$.
4. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$

   b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 23 - Asie jour 1 (23 mars 2023)

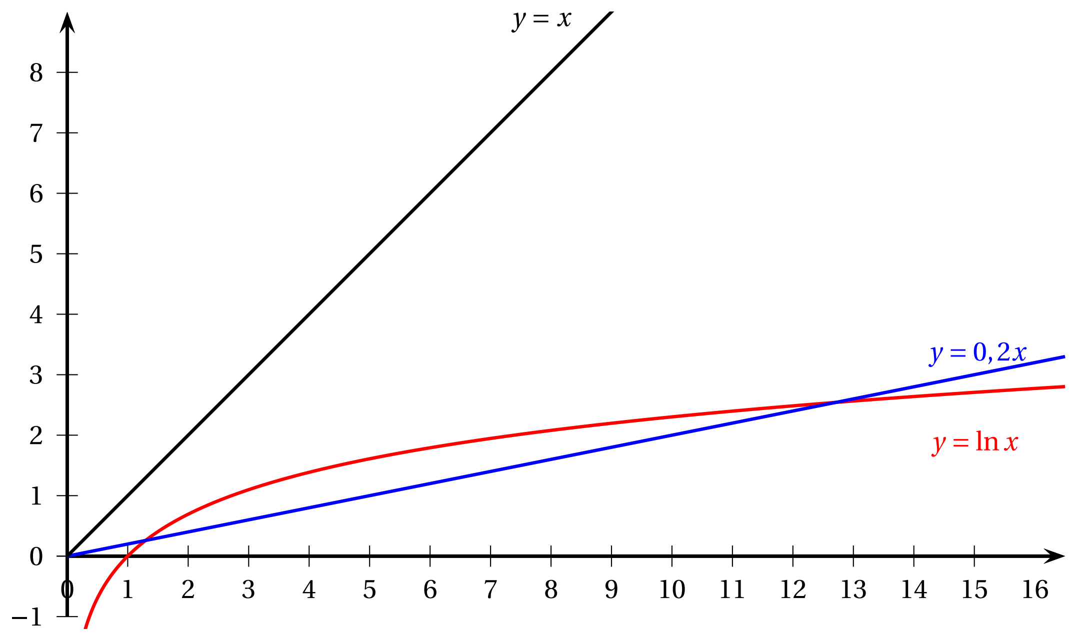
Soit k un réel strictement positif.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln(x) = kx$$

de paramètre k.

1. **Conjectures graphiques :**

   On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0,2x$:



   À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0,2$.

2. Étude du cas $k = 1$:

   On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

   On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Calculer $f'(x)$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.
   Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

   c. En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

k est un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	↘ $-\infty$

a. Donner, en fonction du signe de $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b. Calculer $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

c. Montrer que $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.

d. Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.

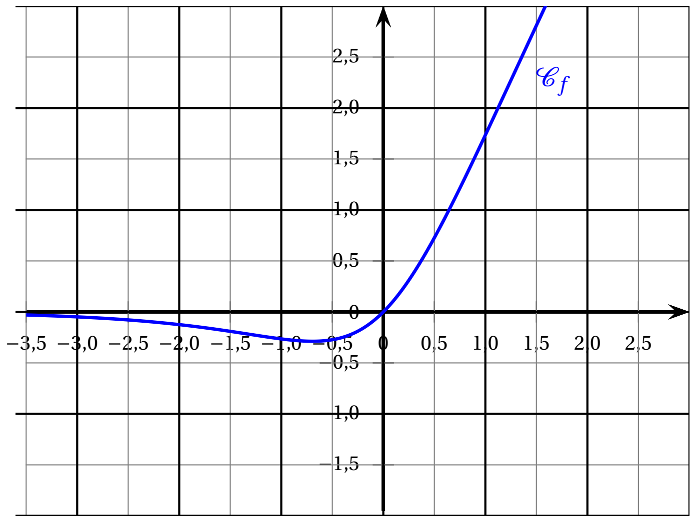
e. Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.

EXERCICE 24 - Asie jour 2 (24 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

> **1.** L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
> **2.** Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\ ;\ +\infty[$.
> **3.** L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = \mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.

   Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

EXERCICE 25 - La Réunion jour 1 (28 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)}.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.

b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On notera α cette solution.

b. En déduire le signe de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On la note F.
Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$?
Justifier.

5. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Quelle est la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c. Déduire des questions 5. a et 5 .b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

EXERCICE 26 - Nouvelle-Calédonie jour 1 (28 août 2023)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)

4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

   b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

EXERCICE 27 - Métropole jour 1 (11 septembre 2023)

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction g par :

$$g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[= I$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $\left(x^2-2x+2\right)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$, que l'on notera α.
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[= I$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[= I$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :

   pour tout nombre réel $x>0$, $f'(x)=\mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$.

   Démontrer que, pour tout nombre réel $x>0$, on a : $f''(x)=\mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\ln x\right)$.
2. On pourra remarquer que pour tout réel $x>0$, $f''(x)=\mathrm{e}^{x}\times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.
3. **a.** Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.

   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A.

   c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.
4. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Montrer que $f'(\alpha)=\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\alpha^2}(1-\alpha)$.

   On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$.

   c. Démontrer que $f'(\alpha)>0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

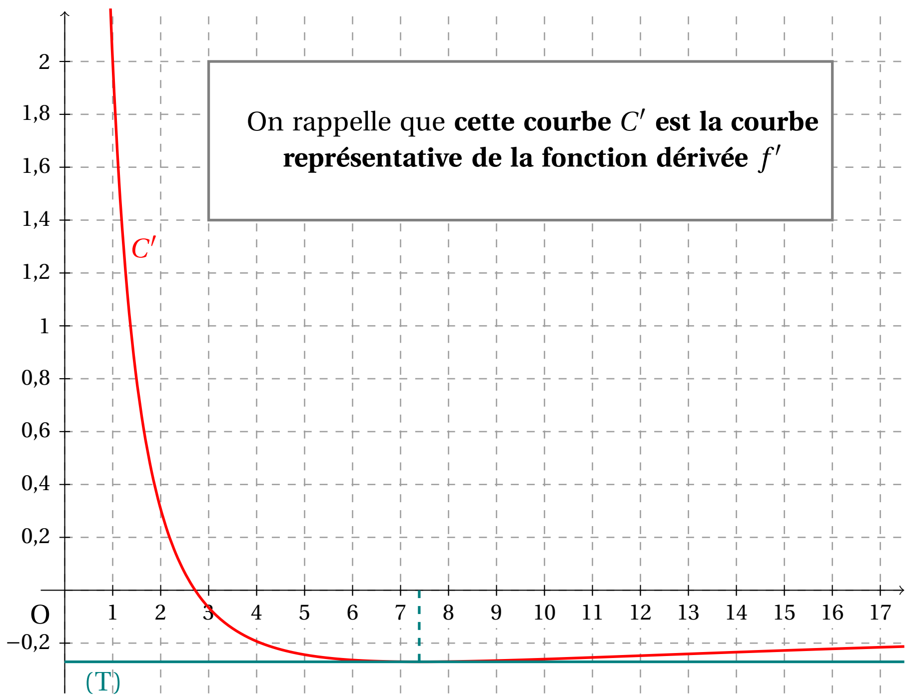
   d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 28 - Métropole jour 2 (12 septembre 2023)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.
La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
   a. le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
   b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.

4. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.
   b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.
   Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C.

EXERCICE 29 - Amérique du Sud jour 1 (26 septembre 2023)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $\quad f'(x) = -4x\ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et que $\alpha \in [1\,;\,\mathrm{e}]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import ** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a=1
    b=2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else :
            a=(a+b)/2
    return (a,b)
```

Il écrit dans la console d'exécution :

`>>> dichotomie(1)`

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination)

Proposition A :	(1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B :	(1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C :	(2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D :	(2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.
2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.
   On admet que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
3. On note T_1 la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse α.
   Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α.

EXERCICE 30 - Amérique du Sud jour 2 (27 septembre 2023)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+\dfrac{1}{4}x$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

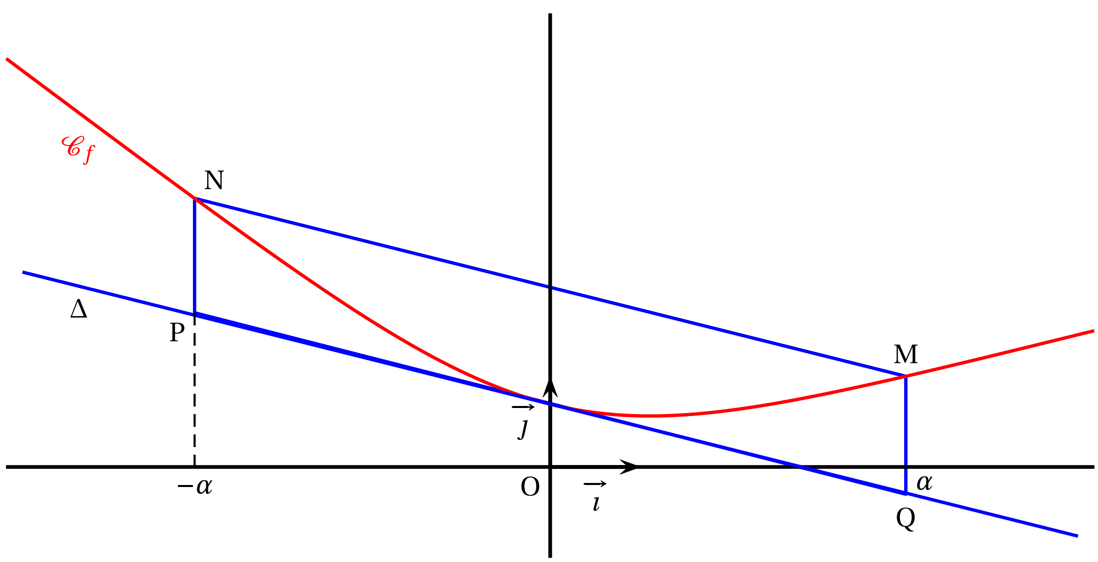
- **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-3}{4\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$.
- **b.** En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;5]$.

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}}.$$

On note Δ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1.
- **a.** Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.
- **b.** En déduire que la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,\alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.

2.
- **a.** Montrer que $f(-\alpha)=\ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha}+1\right)+\dfrac{3}{4}\alpha$.
- **b.** Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

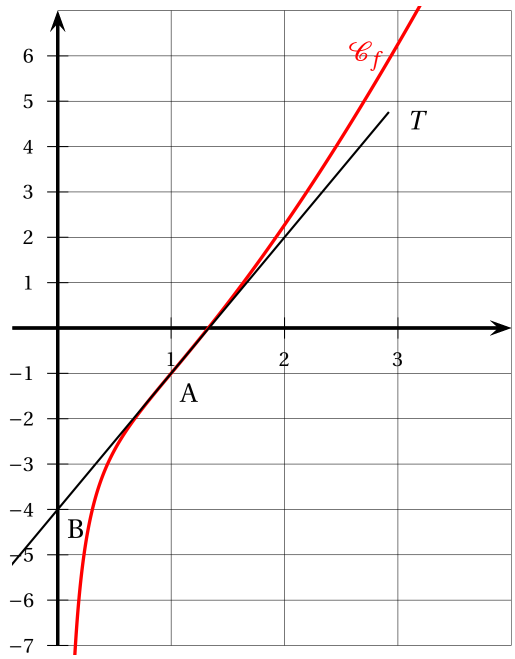
EXERCICE 31 - Amérique du Nord jour 1 (21 mai 2024)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction [définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.
Cette tangente passe également par le point $\mathrm{B}(0\ ;\ -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **a.** Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **b.** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.
3. - **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **b.** Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
     En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. - **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **b.** Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

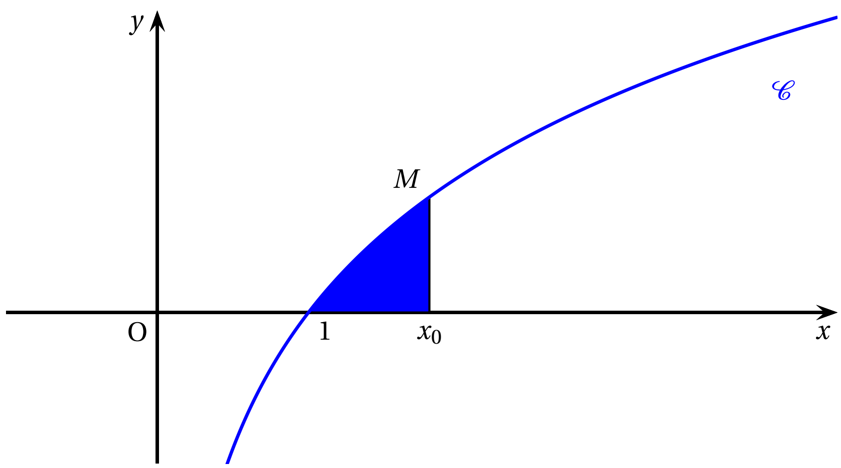
EXERCICE 32 - Amérique du Nord jour 2 (22 mai 2024)

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

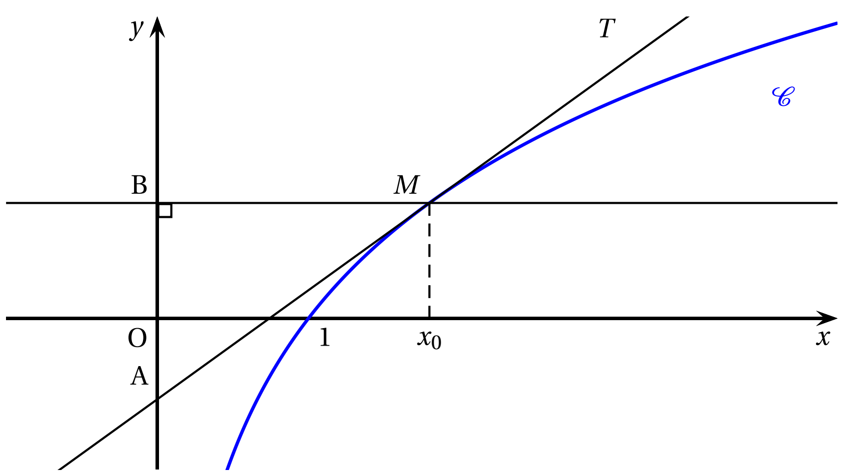
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.

   Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

Exercice 33 - Métropole jour 1 (19 juin 2024)

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.

   b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.

   c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;\,1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

   b. On admet le tableau de signes suivant :

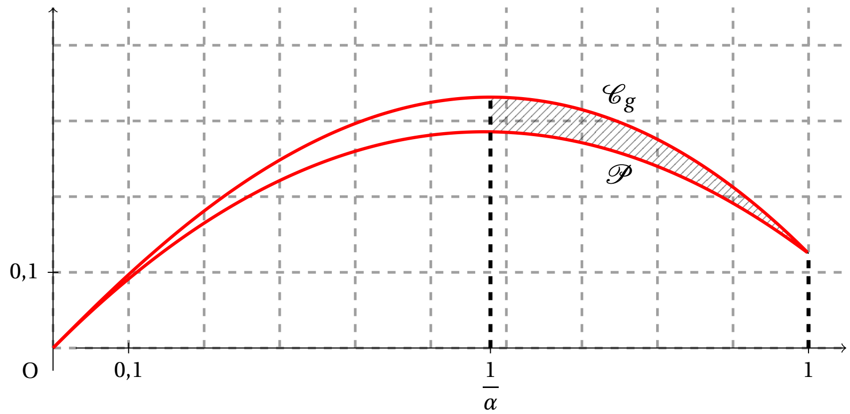
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	||	$+$	0	$-$	

   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

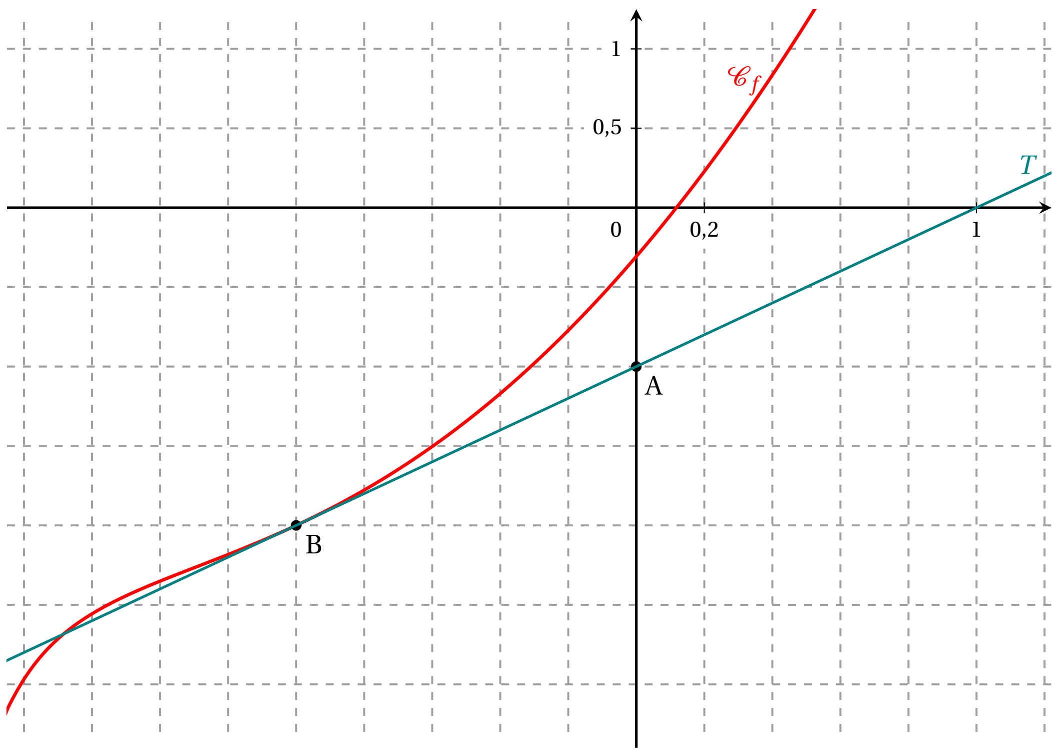
   b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

Exercice 34 - Métropole jour 2 (20 juin 2024)

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction *f*

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

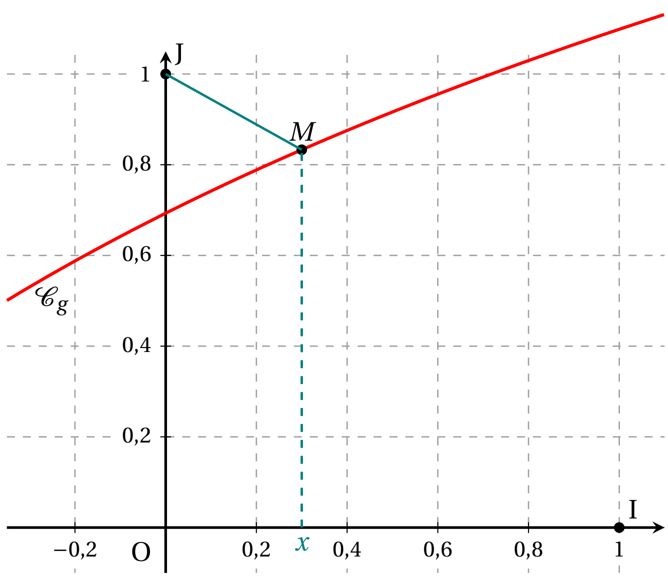
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x) = \ln(x+2)$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0\,;\,\mathrm{I}\,,\,\mathrm{J})$, représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad h(x) = \mathrm{J}M^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

b. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Exercice 35 - Polynésie jour 2 (20 juin 2024)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n, \quad u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.** Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u – log( u / 4 )
    return S
```

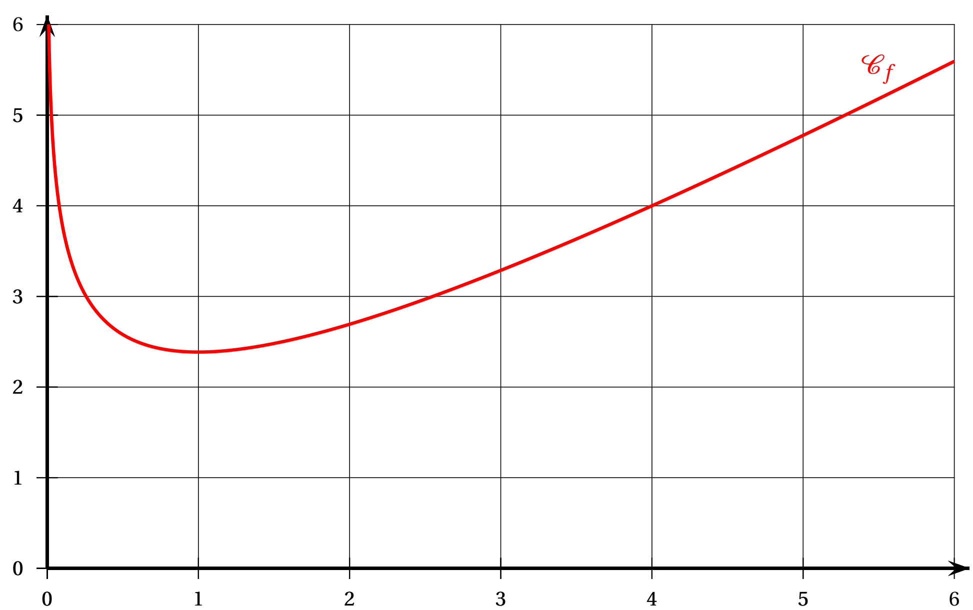
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $[0\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite $\left(u_n\right)$ converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 36 - Métropole Remplacement (11 septembre 2024)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

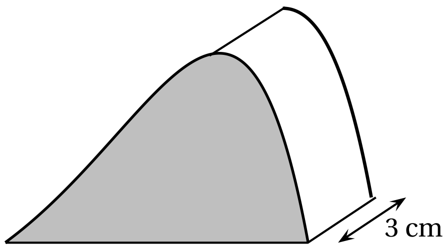


Figure 1

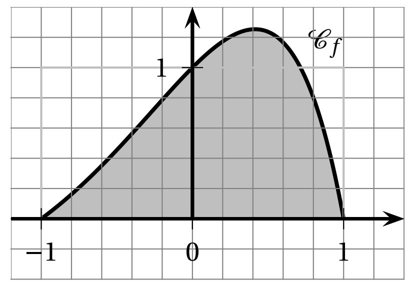


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x}.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

   b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

   où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).
   En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.
Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01\ ;\ +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim_{q \to +\infty} B(q)$.

   b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

   c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$.

   Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

   d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\ ;\ +\infty[$.

   Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

   b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\ ;\ 1{,}2[$.

   On donne $\alpha \approx 0{,}757$.

   En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.