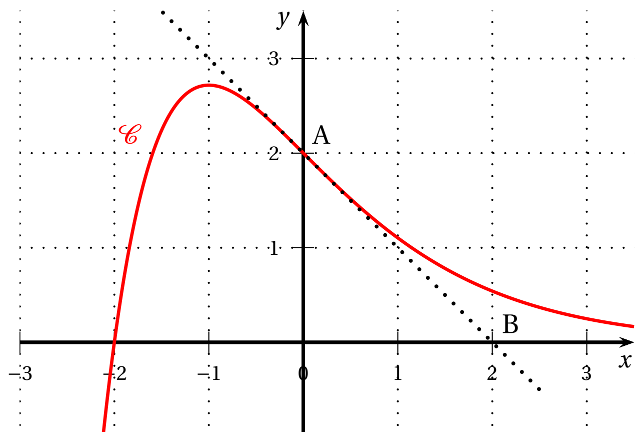
Recueil d'exercices du Baccalauréat sur les Fonctions Exponentielles

EXERCICE 1 - Polynésie jour 1 (2 juin 2021)

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A$(0\,;\,2)$ et B$(2\,;\,0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.

EXERCICE 2 - Asie Jour 1 (7 juin 2021)

Principaux domaines abordés
– Étude de fonction, fonction exponentielle
– Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

1. **a.** Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   b. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   c. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0 ; +\infty[$.
3. **a.** Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0 ; +\infty[$.
   b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1 - y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.

EXERCICE 3 - Métropole jour 1 (7 juin 2021) **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f''(x)=\frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(2x^2-2x+1\right)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

a. $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}$

b. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(1+2x)}{x^2}$.

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

b. est monotone sur $]0\ ;\ +\infty[$

c. admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 **d.** e^{2x}.

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$

b. est convexe $]0\ ;\ +\infty[$

c. est concave sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion.

EXERCICE 4 - Métropole Jour 1 (7 juin 2021)

Principaux domaines abordés :
Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^{x}$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

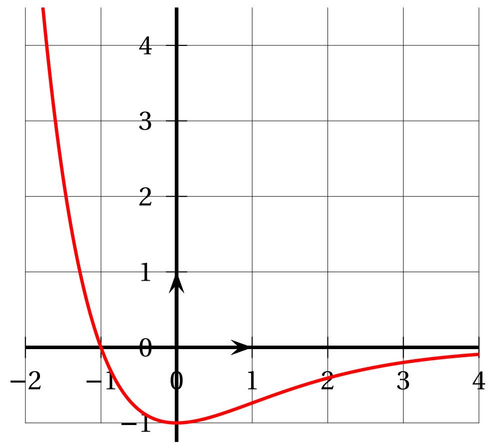
Exercice 5 - Métropole jour 2 (8 juin 2021)

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

Exercice 6 - Centres Etrangers jour 1 (9 juin 2021)
Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle

$$(E): \qquad 3y' + y = 0.$$

   Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $\mathrm{M}(0\,;2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

   et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

   a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{M}(0\,;2)$ admet une équation de la forme :

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

   b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.

   Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a+3$.

2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

Exercice 7 - Centres Etrangers jour 2 (10 juin 2021)

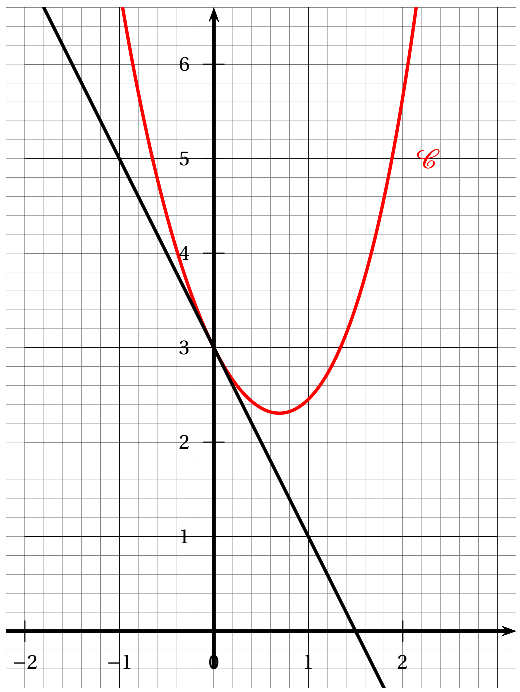
Équation différentielle

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.

c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

4. On considère l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + y = 2\mathrm{e}^{x} - x - 1$$

a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} - x + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E). est solution de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3. On admettra que, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{x} - 2 > 0$.

Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 8 - Métropole jour 1 (13 septembre 2021) **5 points**

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».
Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.
Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = \left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0\,;\,120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; 120]$ on a :

   $$f'(t) = t(t-100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Selon cette modélisation :

   a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?

   b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.

   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus ?

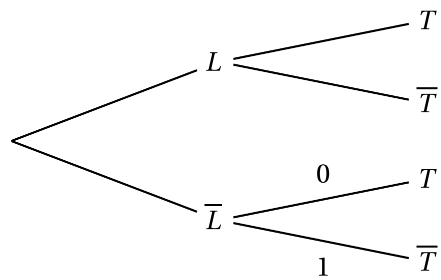
Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la « Chytridiomycose », provoquée par un champignon.
Le chercheur considère que :

- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de $0,74$.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.
Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.
Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.
On notera T l'évènement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'évènement « Le lac est infecté par le champignon ».
On notera $\overline{L}$ l'évènement contraire de L et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de $0,185$.
3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?

EXERCICE 9 - Métropole jour 2 (13 septembre 2021) **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\,;\,\mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :

   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

   a. Montrer que, pour tout nombre réel t,

   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

   b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
   Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

   a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

   On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.

   On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

   Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

   b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

   Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

   a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

   On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.

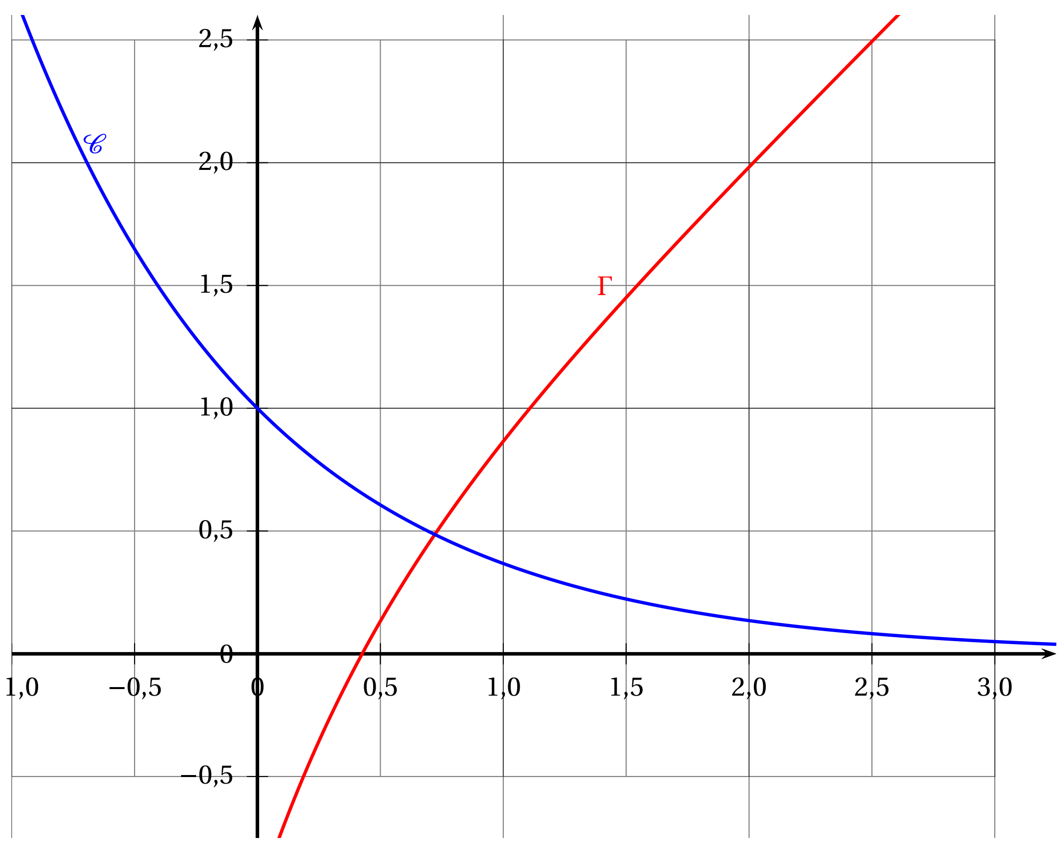
   On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

   Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

   b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

   Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

Annexe à compléter et à rendre avec la copie



EXERCICE 10 - Métropole jour 1 (11 mai 2022)

Thèmes : fonction exponentielle, suites

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0 ; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

   c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
   Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. **a.** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2 ; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

   b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
   Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

   c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.

   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.

   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

EXERCICE 11 - Centres Etrangers jour 1 (11 mai 2022)

Thèmes : Fonction exponentielle et suite

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3. En déduire que :
   si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ alors $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.
Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathscr{C}_f$ de même abscisse.
On s'intéresse aux points d'abscisse $\dfrac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

   où h est la fonction définie à la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n).

n	u_n
1	0,718 281 828
2	0,148 721 271
3	0,062 279 092
4	0,034 025 417
5	0,021 402 758
6	0,014 693 746
7	0,010 707 852
8	0,008 148 453
9	0,006 407 958
10	0,005 170 918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2}.

EXERCICE 12 - Métropole jour 2 (12 mai 2022) **Thèmes : fonctions numériques, fonction exponentielle**

Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,06\left(-x^2 + 13,7x\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0,15x + 2,2)\mathrm{e}^{0,2x} - 2,2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0	$6,85$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$f(6,85)$	↘ $-\infty$

   a. Justifier la limite de f en $+\infty$.

   b. Justifier les variations de la fonction f.

   c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$.

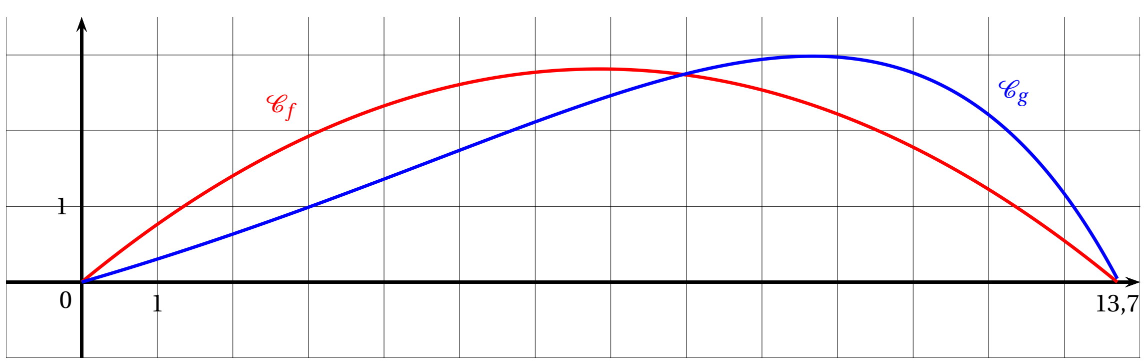
   b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ on a :
   $g'(x) = (-0,03x + 0,29)\mathrm{e}^{0,2x}$.

   c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.
On admettra ici que $13,7$ est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.
On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[0 ; 13,7]$.

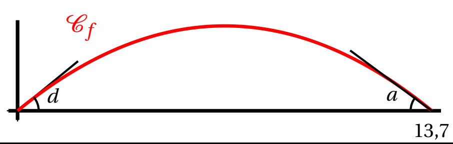
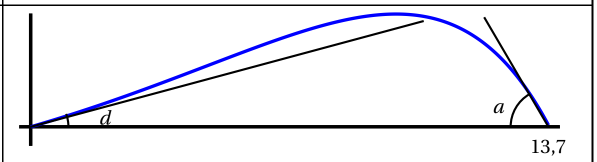


Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 < x < 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ 0,914 mètre).

On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.

De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 13,7. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.

Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_f$	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_g$.
	

1. *Première modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

   Selon ce modèle :

   a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

   b. Vérifier que $f'(0) = 0,822$.

   c. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

   d. Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

2. *Seconde modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

   Selon ce modèle :

   a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
   On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx -1,87$.

   b. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

   c. Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connait sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$\tan(\theta)$	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	$\tan(\theta)$	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

EXERCICE 13 - Centres Etrangers jour 1 (18 mai 2022)

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

   b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)~;~+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1~;~0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. **a.** On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
   Démontrer que $\ell = 4$.

   b.

   On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :
  u = 0
  n = 0
  while u ⩽ a:
    u=1 + u - exp(0.5*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

   L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 14 - Amérique du Nord jour 1 (18 mai 2022)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

   Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1-x^2\right)$.

   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.
5. **Affirmation 5 :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x} = 0$.
6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x, $1+\mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x$.

EXERCICE 15 - Centres Etrangers jour 2 (19 mai 2022)

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;\,1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;\,1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$

   a. Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n) :
    c= ...
    b = ...
    a = c
  return(a,b)
```

   Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).

2. On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$

   b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

   a. Démontrer que $f(A) = 0$.

   b. Déterminer $A - B$.

EXERCICE 16 - Amérique du Nord jour 2 (19 mai 2022)

Thème : fonctions, fonction exponentielle

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3~;~4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3~;~4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3~;~4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3~;~4]$.

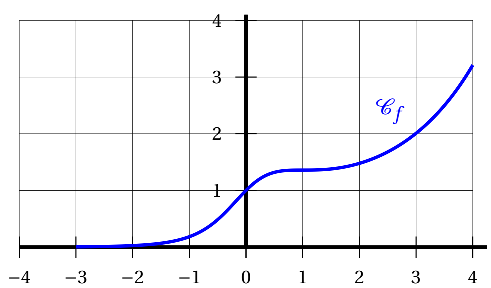
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3~;~4]$ par :

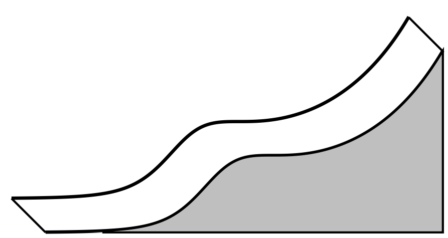
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3~;~4]$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3~;~4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

EXERCICE 17 - Métropole septembre jour 1 (8 septembre 2022)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   - **a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
   - **b.** Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   - **c.** Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
3. Soit k un nombre réel positif ou nul.
   - **a.** Montrer que, si $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.
   - **b.** Si $k > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que f est solution de l'équation :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).

EXERCICE 18 - Centres Etrangers jour 1 (13 mars 2023)

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

EXERCICE 19 - Polynésie jour 1 (13 mars 2023)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^x - x$ est convexe.
2. **Affirmation :** L'équation $(2\text{e}^x - 6)(\text{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. **Affirmation :**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{e}^{2x} - 1}{\text{e}^x - x} = 0.$$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x+5)\text{e}^{3x}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = (2x+1)\text{e}^{3x} + 4$.
Affirmation : F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
On rappelle que `len`(L) représente la longueur de la liste L.

```
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S / len(L)
```

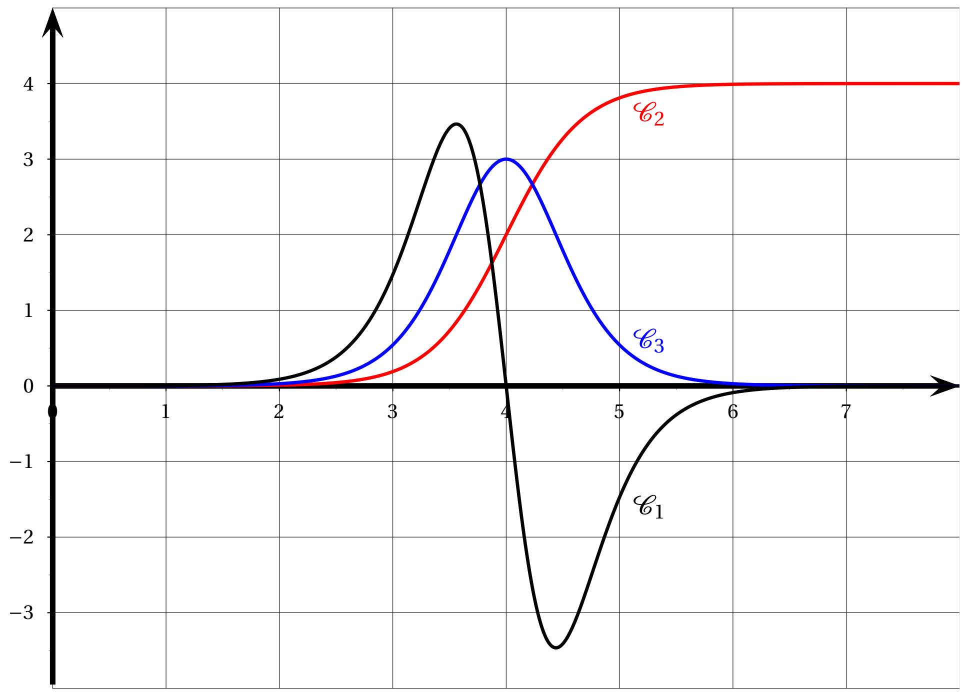
Affirmation : L'exécution de `mystere`([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5]) renvoie 50.

EXERCICE 20 - Polynésie jour 2 (14 mars 2023)

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

Soit un réel k strictement positif.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,
2. Prouver que $g'(0) = k$.
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

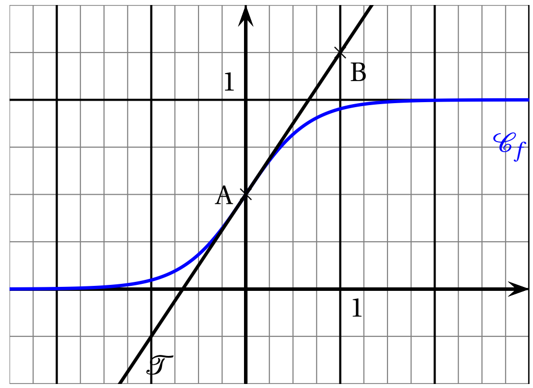
▷ Calcul formel	
1	g(x) =4/(1 + e^(-kx)) $\to g(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-kx}+1}$
2	Simplifier($g''(x)$) $\to g''(x) = -4\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^{kx}-1\right)\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx}+1\right)^3}$

EXERCICE 21 - Centres Etrangers jour 2 (22 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0~;~\dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1~;~\dfrac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

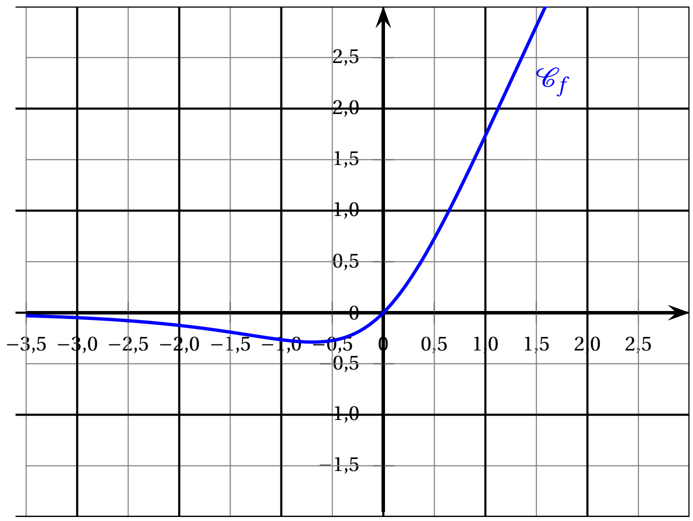
1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$
2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   b. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   c. En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Justifier la réponse.

EXERCICE 22 - Asie jour 2 (24 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\,;\,+\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^{x} + 1.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = e^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.

   Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

EXERCICE 23 - Amérique du Nord jour 1 (27 mars 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - (2x+1)\mathrm{e}^{x}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x - 3$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. **a.** On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.
   b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.
3. **a.** Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

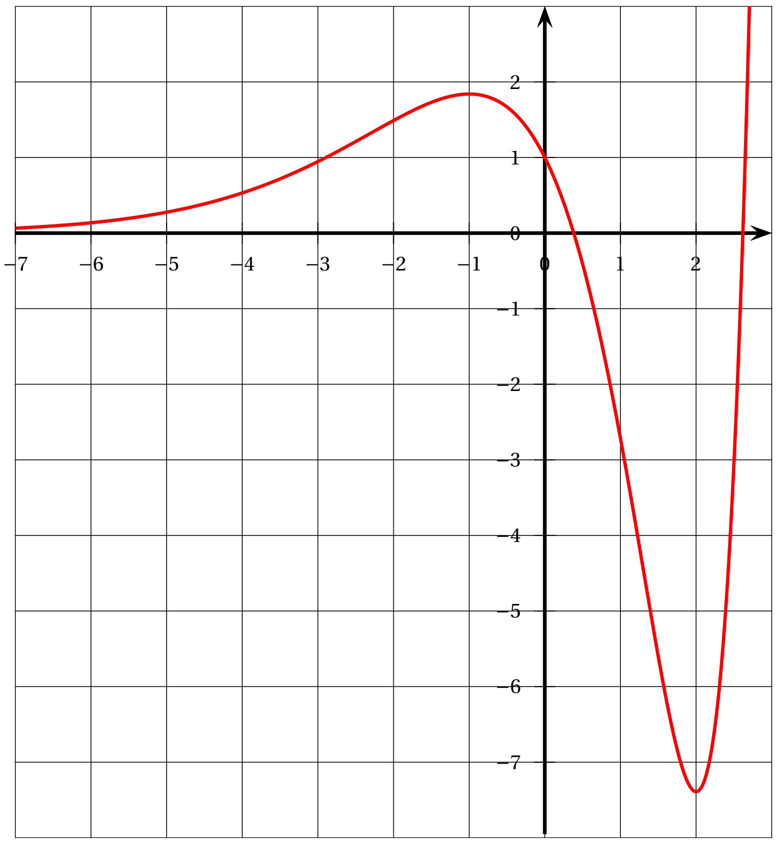
Partie B - Étude de la fonction *f*

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{x}g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

EXERCICE 24 - Amérique du Nord jour 2 (28 mars 2023)

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right) \mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$.

5. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on a $f(x) \leqslant x+6$.

EXERCICE 25 - Nouvelle-Calédonie jour 2 (29 août 2023)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0\,;\,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}.$$

démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

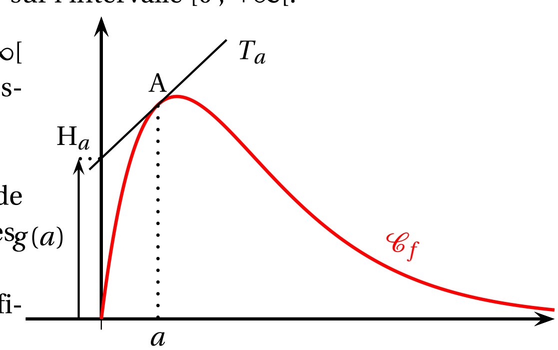
$$f(x) = \frac{367}{1\,000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



   a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = \left[(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}\right]x + a^2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

   b. En déduire l'expression de $g(a)$.

   c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 26 - Polynésie jour 1 (7 septembre 2023)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

c. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

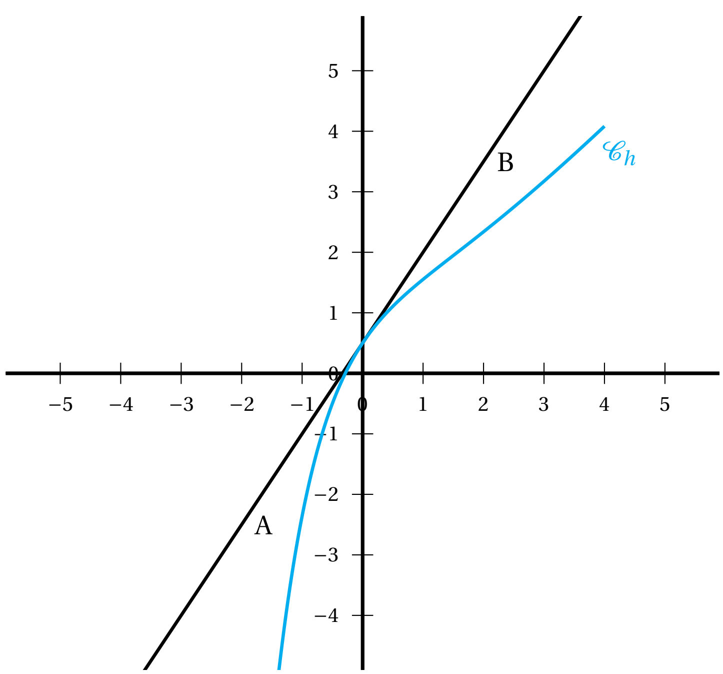
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;\,-2,5)$ et $(2\,;\,3,5)$.



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.
2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

valider ou non la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

EXERCICE 27 - Amérique du Sud jour 2 (27 septembre 2023)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A

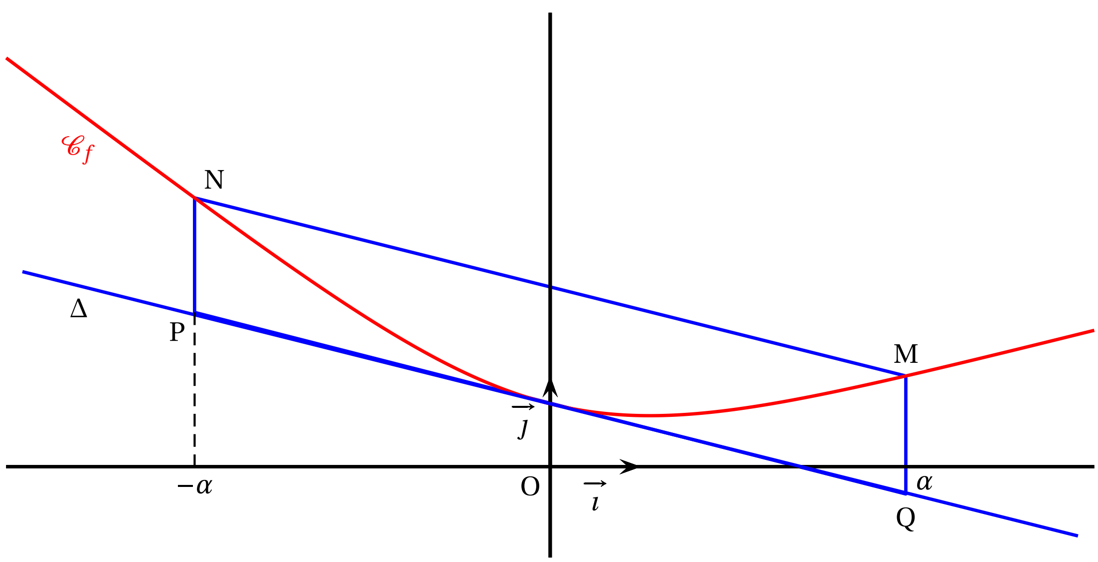
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   - **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 3}{4\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   - **b.** En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;5]$.

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)^2}.$$

On note Δ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1.
   - **a.** Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire que la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\ \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2.
   - **a.** Montrer que $f(-\alpha) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$.
   - **b.** Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

Exercice 28 - Centres Etrangers Jour 2 (6 juin 2024)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

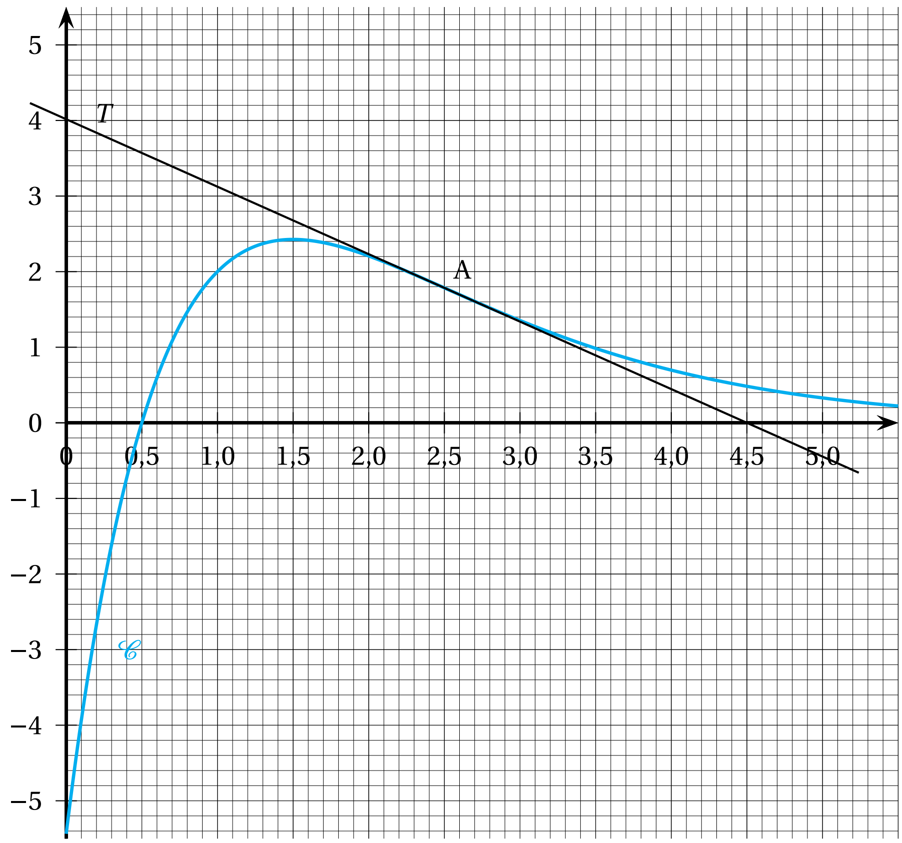
5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 29 - Asie Jour 1(10 juin 2024)

Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



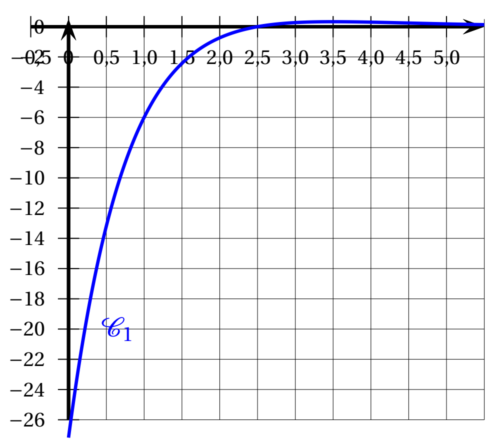
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?

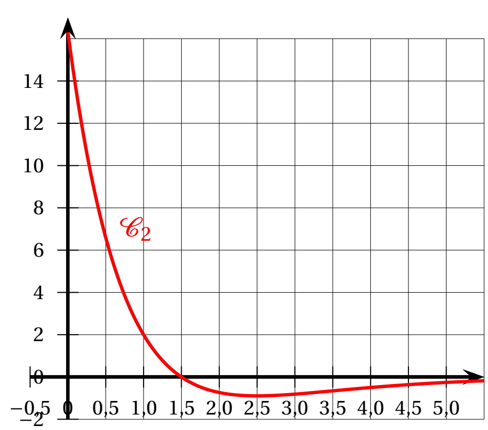
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.

   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.

   Ce choix sera justifié.

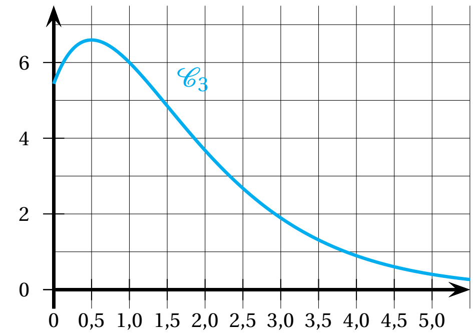


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0~;~+\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

   a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

   b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

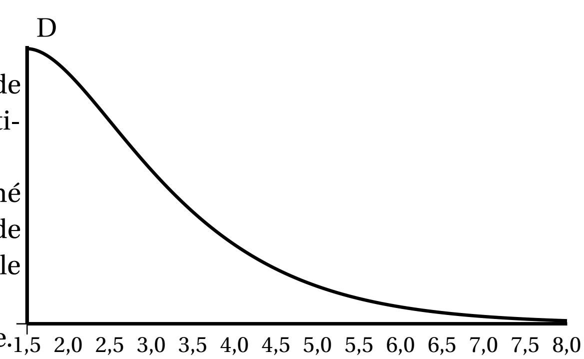
   a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

   b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

   En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
   Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}~;~8\right]$.
   L'unité de longueur est le mètre.



   a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

   b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

   Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de $0,8~\text{m}^2$, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

Exercice 30 - Métropole Remplacement (11 septembre 2024)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

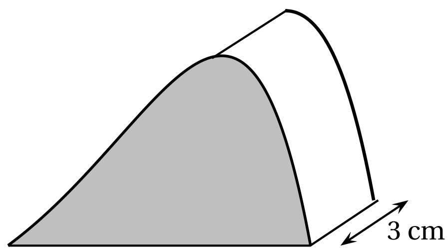


Figure 1

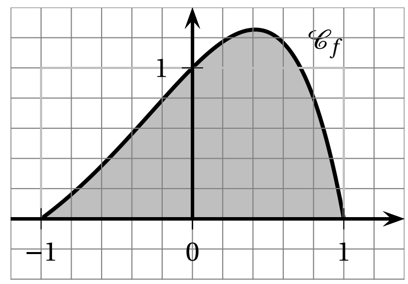


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x}.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

   b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

   où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).
   En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01\,;\,+\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

   b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

   c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$.

   Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

   d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\ ;\ +\infty[$.

   Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

   b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\ ;\ 1{,}2[$.

   On donne $\alpha \approx 0{,}757$.

   En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Exercice 31 - Amérique du Sud Jour 1 (21 novembre 2024)

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18-5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
   a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14\,;\,15]$.
   b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m)>8$	FAUX				

```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

   c. Quel est l'objectif de la fonction solution_equation dans le contexte de la question ?

Exercice 32 - Amérique du Sud Jour 2 (22 novembre 2024)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

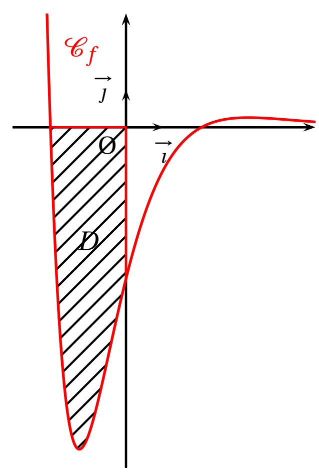
1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^{2} - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.

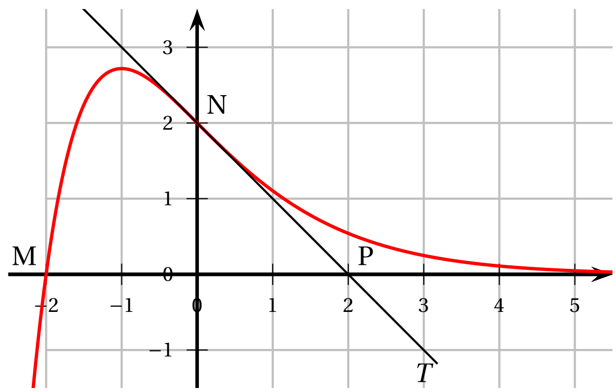


Exercice 33 - Métropole Jour 2 sujet dévoilé (20 juin 2024)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0 ; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

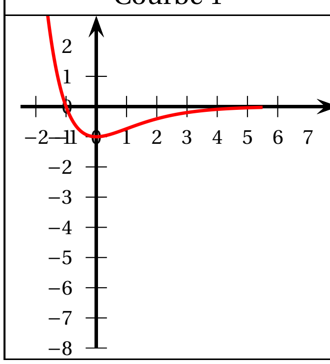
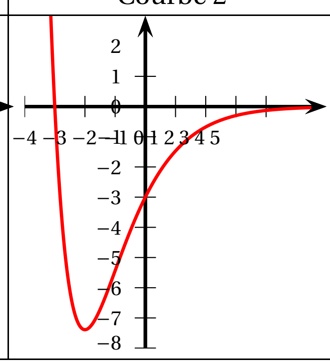
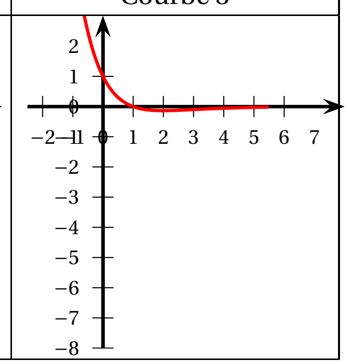


Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.

   b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a+b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. **a.** Étudier la convexité de f.
   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t-3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

   b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

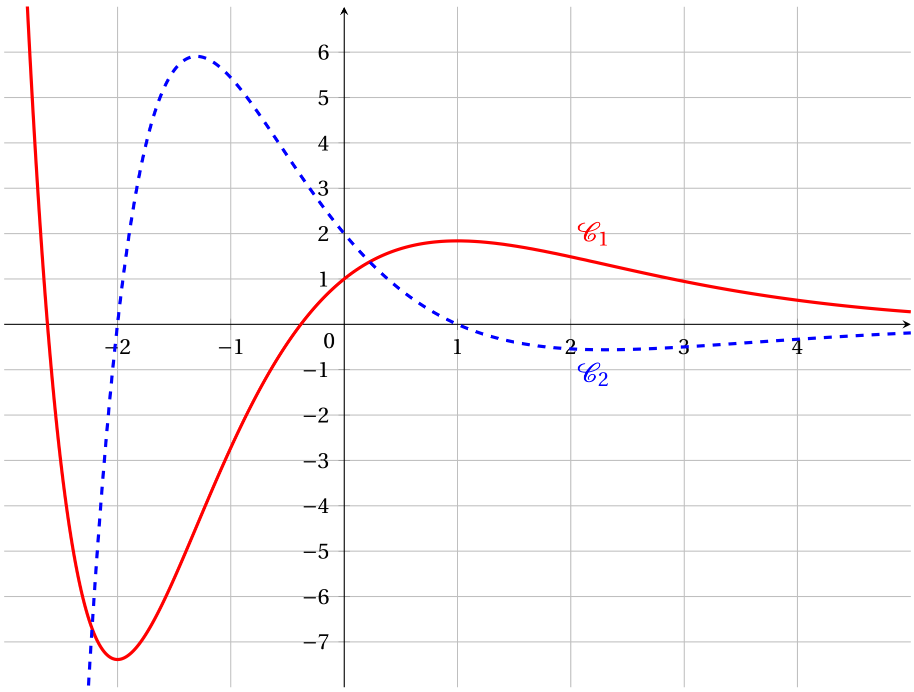
EXERCICE 34 : AMÉRIQUE DU NORD J1 (21 MAI 2025)

La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g.
On précise également que :

- La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).

   Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

   On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \left(-x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2 - 5x - 7\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

   Soit α un nombre réel positif.

   Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice 35 : Amérique du Nord J2 (22 mai 2025)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x}[\sin(x) + \cos(x)].$$

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{x}\sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

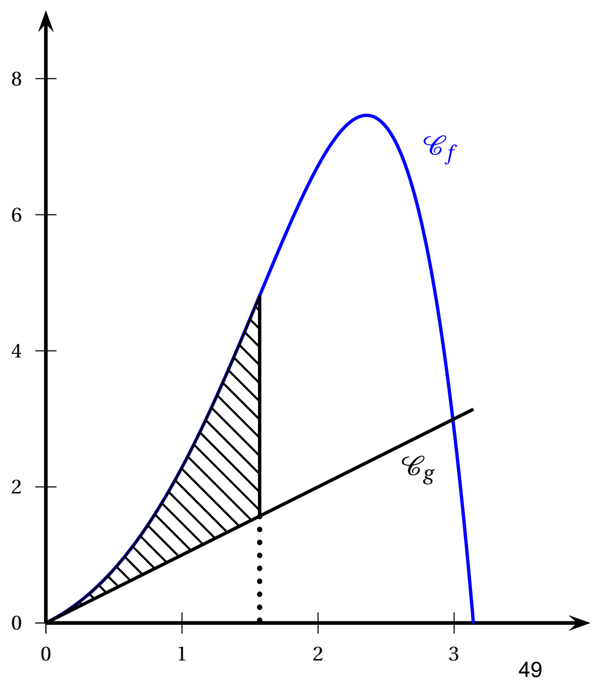
$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.



EXERCICE 36 : AMÉRIQUE DU NORD J2 SECOURS (22 MAI 2025)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :
$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$
4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2. **a.** Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.
   b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.