☙ Baccalauréat spécialité ❧

Thème : Étude des fonctions trigonométriques

Sujets depuis 2021

Table des matières

1 Amérique du Nord – Jour 1 – 21 mai 2024

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6         n=n+1
7         I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n
```

2 Centres Étrangers – Jour 1 – 5 juin 2024

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
   On considère l'équation différentielle

   $$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\,\mathrm{e}^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

3 Amérique du Nord – Jour 2 – 22 mai 2025

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x}[\sin(x)+\cos(x)].$$

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{x}\sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

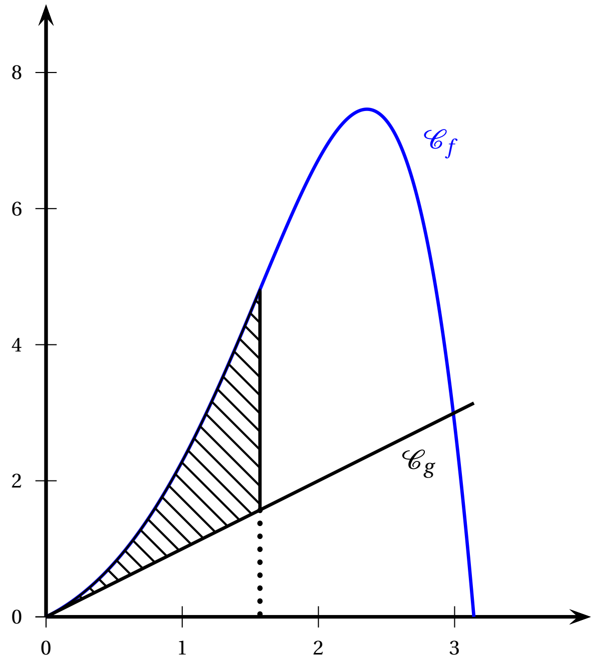
$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.


8
6
4
2
0
0
1
2
3
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$

4 Asie – Jour 1 – 9 juin 2026

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;2\pi]$, on a :

$$g'(x) = -x\sin(x)$$

b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$ ci-dessous.

Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0		π		2π
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	2π
			$-\pi$		

c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi;2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0;2\pi]$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;2\pi]$.

d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.

Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$