

# ∞ Baccalauréat spécialité ∞

## Thème : Étude de la fonction logarithme népérien

Sujets depuis 2021

### Table des matières

1 Amérique du Nord 28 mai 2019	3
2 Polynésie - 2 juin 2021	4
3 Asie 1 - 7 juin 2021	5
4 Asie 2 - 8 juin 2021	6
5 Métropole Antilles–Guyane La Réunion sujet 2 - 8 juin 2021	8
6 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021	9
7 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021	12
8 Centres étrangers 2 - 12 mai 2022	13
9 Asie 1 - 17 mai 2022	14
10 Asie 2 - 18 mai 2022	17
11 Centres étrangers Groupe I J2 - 19 mai 2022	18
12 Polynésie - 30 août 2022	19
13 Métropole J2 - 9 septembre 2022	20
14 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022	21
15 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022	22
16 Amérique du Sud J2 - 27 septembre 2022	23
17 Nouvelle-Calédonie J1 - 26 octobre 2022	25
18 Nouvelle-Calédonie J2 - 27 octobre 2022	26
19 Centres étrangers J2 - 14 mars 2023	27
20 Métropole J1 - 20 mars 2023	28
21 Centres étrangers J1 - 21 mars 2023	29
22 Asie J1 - 23 mars 2023	30
23 La Réunion J1 - 28 mars 2023	32
24 Nouvelle-Calédonie J1 - 28 août 2023	33

<b>25 Métropole J1 - 11 sept 2023</b>	<b>34</b>
<b>26 Métropole J2 - 12 sept 2023</b>	<b>35</b>
<b>27 Amérique du Sud J1 - 26 sept 2023</b>	<b>37</b>
<b>28 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2024</b>	<b>39</b>
<b>29 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2024</b>	<b>41</b>
<b>30 Asie – Sujet 2 – 11 juin 2024</b>	<b>42</b>
<b>31 Métropole – Sujet 1 – 19 juin 2024</b>	<b>44</b>
<b>32 Métropole – Sujet 1 (secours) – 19 juin 2024</b>	<b>46</b>
<b>33 Métropole – Sujet 2 – 20 juin 2024</b>	<b>48</b>
<b>34 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025</b>	<b>50</b>
<b>35 Métropole – Sujet 1 – 17 juin 2025</b>	<b>52</b>
<b>36 Polynésie – Sujet 2 – 18 juin 2025</b>	<b>54</b>
<b>37 Métropole – Sujet 2 – 10 septembre 2025</b>	<b>55</b>
<b>38 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025</b>	<b>57</b>
<b>39 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025</b>	<b>58</b>
<b>40 Amérique du Nord – Jour 1 – 20 mai 2026</b>	<b>59</b>
<b>41 Amérique de Nord – Jour 2 – 21 mai 2026</b>	<b>60</b>
<b>42 Centres Étrangers – Jour 1 – 10 juin 2026</b>	<b>61</b>
<b>43 Centres Étrangers – Jour 2 – 11 juin 2026</b>	<b>63</b>

# 1 Amérique du Nord 28 mai 2019

## EXERCICE B

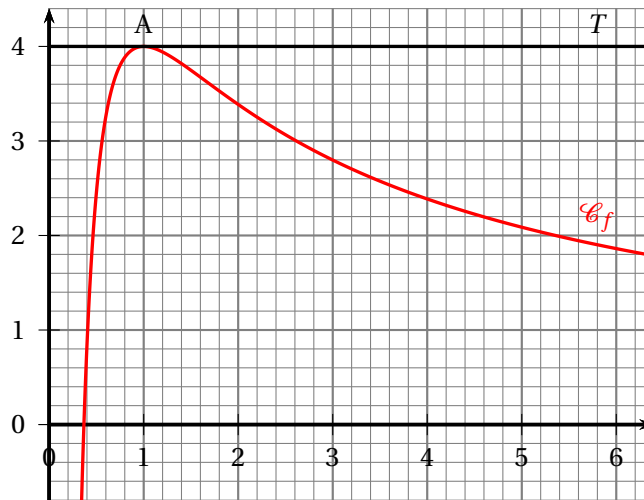
5 points

Principaux domaines abordés :

- Fonction logarithme népérien
- Convexité

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative d'une fonction  $f$ , deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente horizontale  $T$  au point  $A(1; 4)$ .



1. Préciser les valeurs  $f(1)$  et  $f'(1)$ .

On admet que la fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels  $a$  et  $b$ .

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
 5. Déterminer le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
 6. Démontrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

## 2 Polynésie - 2 juin 2021

### EXERCICE B

**Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation**

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

#### Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 4]$  par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x.$$

1. On rappelle que  $f'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $f$ .
  - a. Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 4]$ , montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

- b. Dresser le tableau de signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[1; 4]$ .
  - c. En déduire les variations de  $f$  sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , sur l'intervalle  $[1; 4]$  puis donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.
  3. Dresser le tableau de signe de  $f(x)$  pour  $x \in [1; 4]$ .

#### Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour  $x$  milliers de litres vendus, avec  $x$  nombre réel de l'intervalle  $[1; 4]$ , l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice  $B(x)$  par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x \ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2. Pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1; 4]$ , montrer que  $B'(x) = f(x)$  où  $B'$  désigne la fonction dérivée de  $B$ .
3.
  - a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[1; 4]$ .
  - b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

### 3 Asie 1 - 7 juin 2021

#### EXERCICE – A

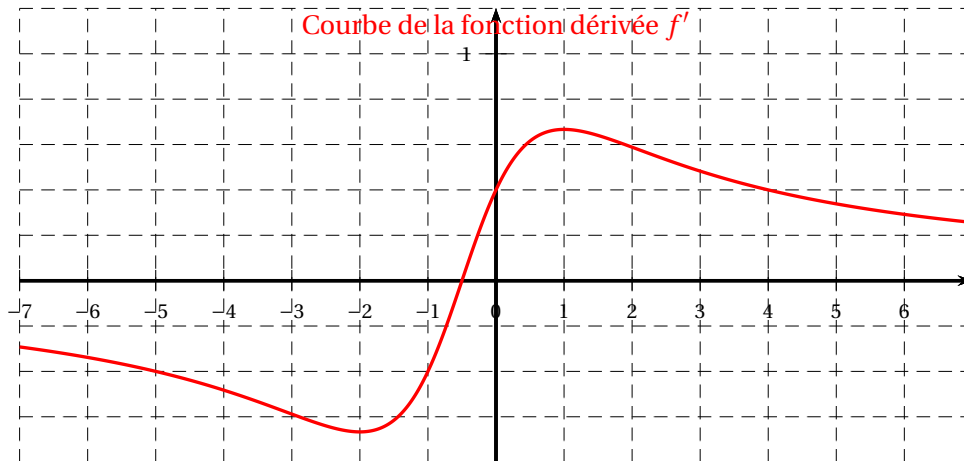
##### Principaux domaines abordés

- convexité
- fonction logarithme

#### Partie I : lectures graphiques

$f$  désigne une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$ .



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction  $f$  en 0.
2.
  - a. Donner les variations de la fonction dérivée  $f'$ .
  - b. En déduire un intervalle sur lequel  $f$  est convexe.

#### Partie II : étude de fonction

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln \left( x^2 + x + \frac{5}{2} \right).$$

1. Calculer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Déterminer une expression  $f'(x)$  de la fonction dérivée de  $f$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
3. En déduire le tableau des variations de  $f$ . On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4.
  - a. Justifier que l'équation  $f(x) = 2$  a une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $\left[ -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ .
  - b. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
5. La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On admet que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left( x^2 + x + \frac{5}{2} \right)^2}$ .

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de  $f$ .

## 4 Asie 2 - 8 juin 2021

### EXERCICE – B

#### Principaux domaines abordés

- Suites, étude de fonction
- Fonction logarithme

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x - \ln(x - 1).$$

On considère la suite  $(u_n)$  de terme initial  $u_0 = 10$  et telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

#### Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de  $(u_n)$  par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite  $(u_n)$ .

#### Partie II :

On rappelle que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x - \ln(x - 1).$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . On admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
2.
  - a. Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Montrer que pour tout  $x \in ]1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{x-2}{x-1}$ .
  - b. En déduire le tableau des variations de  $f$  sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ , complété par les limites.
  - c. Justifier que pour tout  $x \geq 2$ ,  $f(x) \geq 2$ .

#### Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que  $u_n \geq 2$  pour tout entier naturel  $n$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
4. On admet que  $\ell$  vérifie  $f(\ell) = \ell$ . Donner la valeur de  $\ell$ .

## 5 Métropole Antilles–Guyane La Réunion sujet 2 - 8 juin 2021

### Exercice A

Principaux domaines abordés :  
Fonction logarithme; dérivation

#### Partie 1

On désigne par  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction  $h$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $h'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de  $h$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $h'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$ .
3. En déduire les variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
4. Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à  $]0; +\infty[$  et vérifier que :  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .
5. Déterminer le signe de  $h(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .

#### Partie 2

On désigne par  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  les représentations graphiques respectives de  $f_1$  et  $f_2$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .  
On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées  $(\alpha; \alpha)$ .  
On rappelle que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $h(x) = 0$ .

## 6 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021

### Exercice B

Principaux domaines abordés :  
Fonction logarithme.

#### Partie I

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$ .
3. On note  $h'$  la fonction dérivée de  $h$ . Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
5. Démontrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$ . Justifier que l'on a :  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

#### Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0 ; +\infty[$  par :

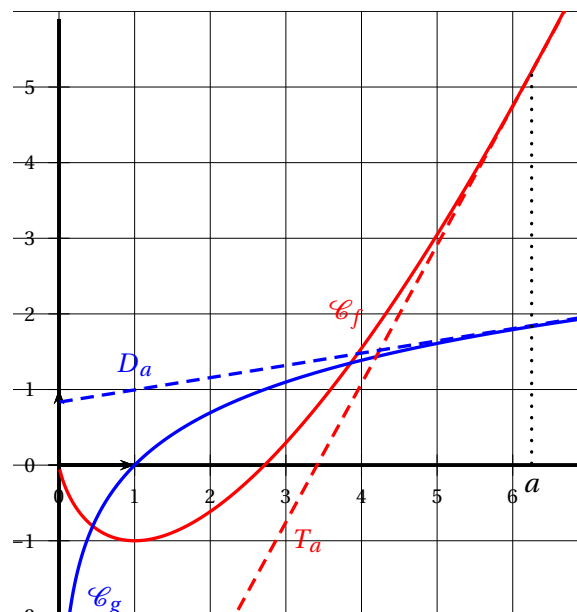
$$f(x) = x \ln(x) - x; \quad g(x) = \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentant respectivement les fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout nombre réel  $a$  strictement positif, on appelle :

- $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en son point d'abscisse  $a$ ;
- $D_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_g$  en son point d'abscisse  $a$ .

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ainsi que deux tangentes  $T_a$  et  $D_a$  sont représentées ci-dessous.



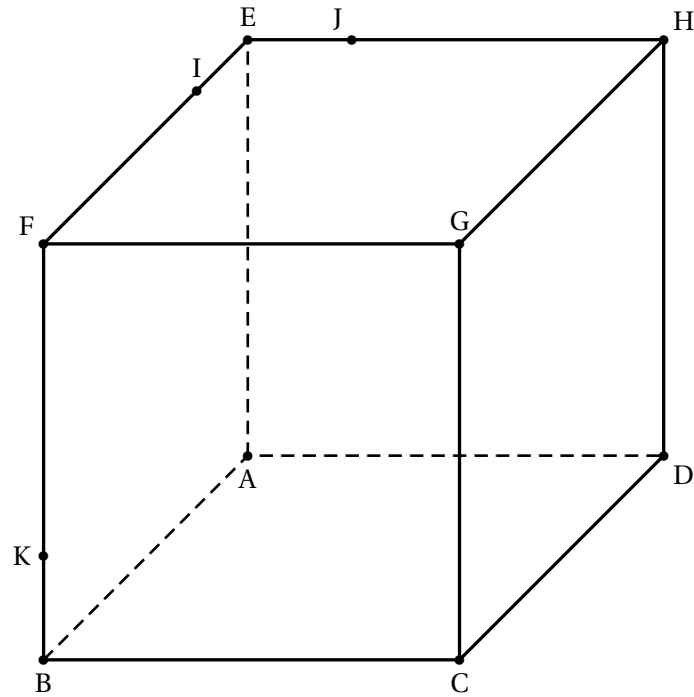
On recherche d'éventuelles valeurs de  $a$  pour lesquelles les droites  $T_a$  et  $D_a$  sont perpendiculaires.

Soit  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

1. Justifier que la droite  $D_a$  a pour coefficient directeur  $\frac{1}{a}$ .
2. Justifier que la droite  $T_a$  a pour coefficient directeur  $\ln(a)$ .

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs  $m$  et  $m'$  sont perpendiculaires si et seulement si  $mm' = -1$ .

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de  $a$ , que l'on identifiera, pour laquelle les droites  $T_a$  et  $D_a$  sont perpendiculaires.

**ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE****À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER  
L'EXERCICE A**

## 7 Métropole sujet 1 - 13 septembre 2021

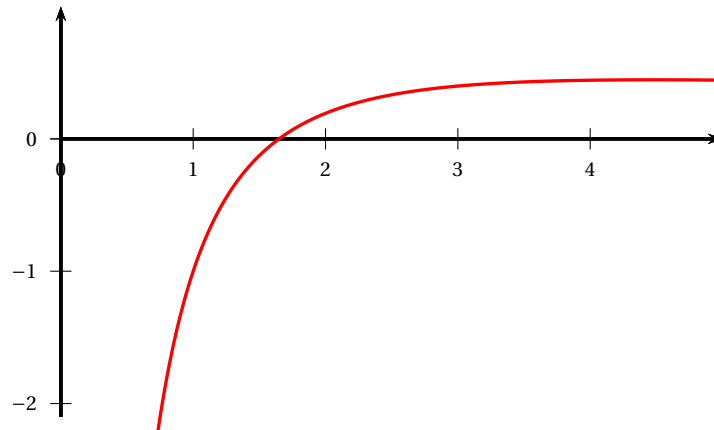
### Exercice B

Principaux domaines abordés :  
Fonction logarithme, limites, dérivation.

#### Partie I

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = 0$ .  
On donnera la valeur exacte de  $\alpha$  ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de  $f(x)$  lorsque  $x$  varie dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

#### Partie II

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1.
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en 0.
  - b. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
2. On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :  $g'(x) = f(x)$ , où  $f$  désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction  $g$  en 0 et en  $+\infty$ , ainsi que la valeur du minimum de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .
4. Démontrer que, pour tout nombre réel  $m > -0,25$ , l'équation  $g(x) = m$  admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation  $g(x) = 0$ .

## 8 Centres étrangers 2 - 12 mai 2022

### EXERCICE 2 7 points

### Thèmes : Fonction logarithme et suite

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0 ainsi que sa limite en  $+\infty$ .
2. a. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et on notera  $f'$  sa fonction dérivée.  
Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ . On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  et les limites.
  - c. Justifier que pour tout  $x \in ]0 ; 1[$ ,  $f(x) \in ]0 ; 1[$ .
3. a. Déterminer une équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.  
b. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .  
c. En déduire que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite  $(u_n)$  par son premier terme  $u_0$  élément de l'intervalle  $]0 ; 1[$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < 1$ .
- b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite  $(u_n)$ .
- c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

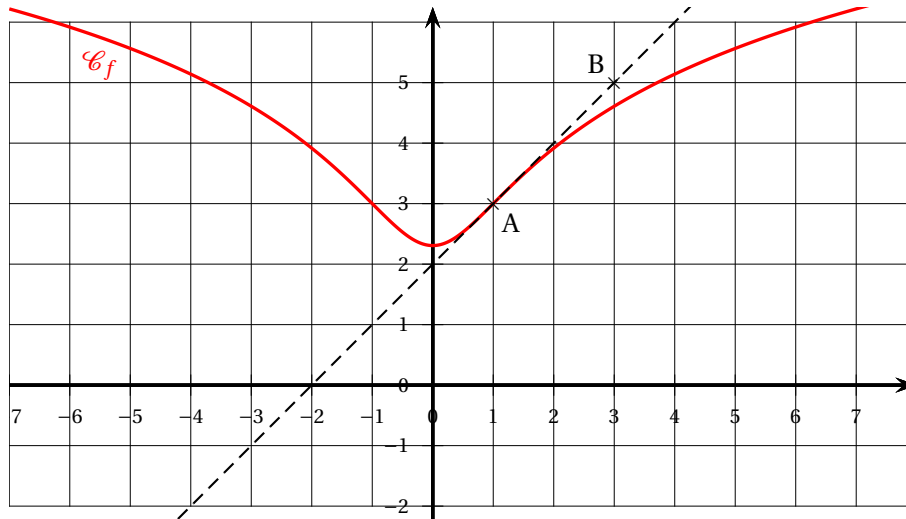
## 9 Asie 1 - 17 mai 2022

### EXERCICE 4

7 points

Principaux domaines abordés : Étude de fonctions. Fonction logarithme.

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On considère les points  $A(1; 3)$  et  $B(3; 5)$ . On donne ci-dessous  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

#### Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
2. La fonction  $f$  est définie par l'expression  $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels positifs.
  - a. Déterminer l'expression de  $f'(x)$ .
  - b. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  à l'aide des résultats précédents.

#### Partie B

On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

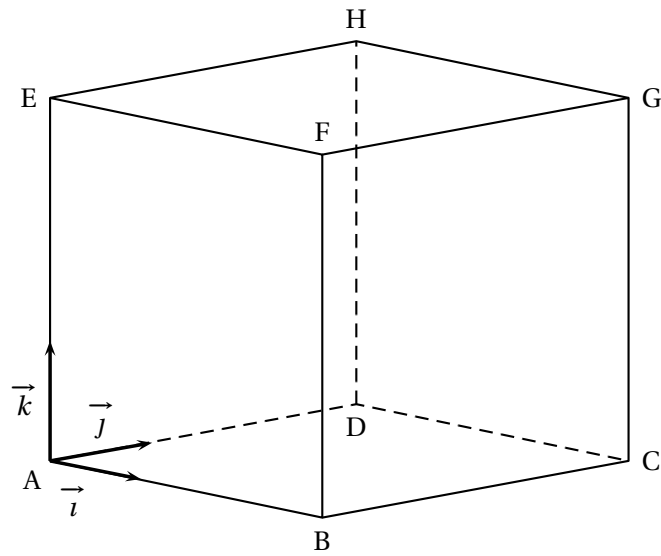
$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

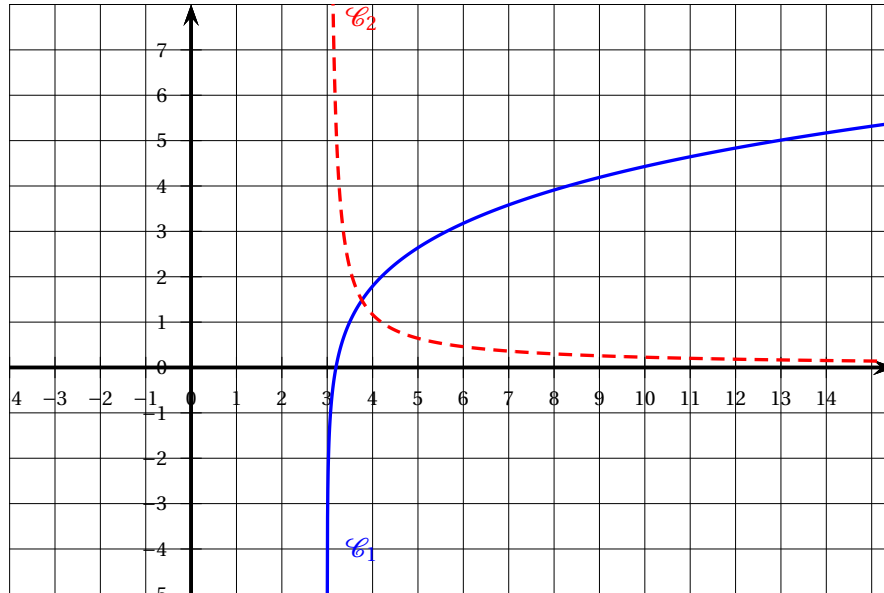
1. Montrer que  $f$  est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Déterminer l'expression de  $f'(x)$ .  
Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Dresser le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
4. À l'aide du tableau des variations de  $f$ , donner les valeurs du réel  $k$  pour lesquelles l'équation  $f(x) = k$  admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation  $f(x) = 3 + \ln 2$ .

**Partie C**

On rappelle que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$ .

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
2. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ .
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.

**ANNEXE à rendre avec la copie**

**10 Asie 2 - 18 mai 2022****EXERCICE 2****7 points***Principaux domaines abordés : Étude des fonctions. Fonction logarithme.***Partie A**

Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction  $f$  et de sa fonction dérivée, notée  $f'$ , toutes deux définies sur  $]3; +\infty[$ .

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation  $f(x) = 3$ .
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction  $f$ .

**Partie B**

1. Justifier que la quantité  $\ln(x^2 - x - 6)$  est bien définie pour les valeurs  $x$  de l'intervalle  $]3; +\infty[$ , que l'on nommera  $I$  dans la suite.
2. On admet que la fonction  $f$  de la partie A est définie par  $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$  sur  $I$ . Calculer les limites de la fonction  $f$  aux deux bornes de l'intervalle  $I$ .  
En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  sur  $I$ .
3.
  - a. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  appartenant à  $I$ .
  - b. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $I$ .  
Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  en y faisant figurer les limites aux bornes de  $I$ .
4.
  - a. Justifier que l'équation  $f(x) = 3$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]5; 6[$ .
  - b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
5.
  - a. Justifier que  $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$ .
  - b. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $I$ .

## 11 Centres étrangers Groupe I J2 - 19 mai 2022

**EXERCICE 4 6 points**

**Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme; Suites**

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  de  $]0; 1]$  par :

$$f(x) = e^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de  $f$  en 0.
2. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; 1]$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée. Démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; 1]$ , on a :

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; 1]$ , on a  $xe^{-x} < 1$ .  
En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; 1]$ .
4. Démontrer qu'il existe un unique réel  $\ell$  appartenant à  $]0; 1]$  tel que  $f(\ell) = 0$ .

### Partie B

1. On définit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

- a. Calculer  $a_1$  et  $b_1$ . On donnera des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près.
- b. On considère ci-dessous la fonction termes, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
    a=1/10
    b=1
    for k in range(0,n) :
        c= ...
        b = ...
        a = c
    return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

2. On rappelle que la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$$

- b. En déduire que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes.
3. On note  $A$  la limite de  $(a_n)$  et  $B$  la limite de  $(b_n)$ .  
On admet que  $A$  et  $B$  appartiennent à l'intervalle  $]0; 1]$ , et que  $A = e^{-B}$  et  $B = e^{-A}$ .
  - a. Démontrer que  $f(A) = 0$ .
  - b. Déterminer  $A - B$ .



## 13 Métropole J2 - 9 septembre 2022

### Exercice 3 7 points

Thèmes : fonction logarithme, suites

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

#### Partie A

1. Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
2. Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.
  - a. Démontrer que, pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $f'(x) = -\ln x$ .
  - b. En déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation  $f(x) = x$  sur  $]0; +\infty[$ .

#### Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. On rappelle que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0,5; 1]$ .  
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .
2.
  - a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
  - b. On note  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .

#### Partie C

Pour un nombre réel  $k$  quelconque, on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel  $k$ , montrer que  $f_k$  admet un maximum  $y_k$  atteint en  $x_k = e^{k-1}$ .
2. Vérifier que, pour tout nombre réel  $k$ , on a :  $x_k = y_k$ .

## 14 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022

### EXERCICE 2 SUITES

7 points

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 4$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$ .

1.
  - a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
  - b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée `suite_u` et prend pour paramètre l'entier naturel  $p$ . Elle renvoie la valeur du terme de rang  $p$  de la suite  $(u_n)$ .

```
def suite_u(p) :
    u= ...
    for i in range(1,...) :
        u =...
    return u
```

2.
  - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < u_n \leq 4$ .
  - b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
3.
  - a. Justifier que la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  vérifie l'égalité  $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$ .
  - b. En déduire la valeur de  $\ell$ .
4. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = \ln(u_n)$  et  $w_n = v_n - \ln(5)$ .
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$ .
  - b. Montrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison 2.
  - c. Pour tout entier naturel  $n$ , donner l'expression de  $w_n$  en fonction de  $n$  et montrer que  $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$ .
5. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## 15 Amérique du Sud J1 - 26 septembre 2022

### EXERCICE 3 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME

7 points

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

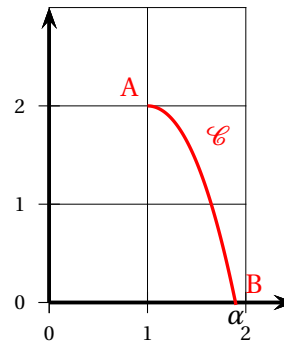
La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée. On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthonormé du plan.

#### PARTIE A

1. Justifier que  $g(e)$  est strictement négatif.
2. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .
3.
  - a. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $g'(x) = -4x \ln(x)$ .
  - b. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$
  - c. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .
  - d. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$
4. Dédurre de ce qui précède le signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

#### PARTIE B

1. On admet que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; \alpha]$ ,  $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$ . Justifier que la fonction  $g$  est concave sur l'intervalle  $[1 ; \alpha]$ .
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives 1 et  $\alpha$ .
  - a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
  - b. En déduire que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; \alpha]$ ,  $g(x) \geq \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$ .



## 16 Amérique du Sud J2 - 27 septembre 2022

### EXERCICE 2 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME

7 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$ , par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

#### PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire $g$

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = 2(x - 1) - x \ln(x).$$

On note  $g'$  la fonction dérivée de  $g$ . On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

1. Calculer  $g(1)$  et  $g(e)$ .
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +0} g(x)$  en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) = 1 - \ln(x)$ .  
En déduire le tableau des variations de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
4. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions distinctes sur  $]0 ; +\infty[$  : 1 et  $\alpha$  avec  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[e ; +\infty[$ .  
On donnera un encadrement de  $\alpha$  à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

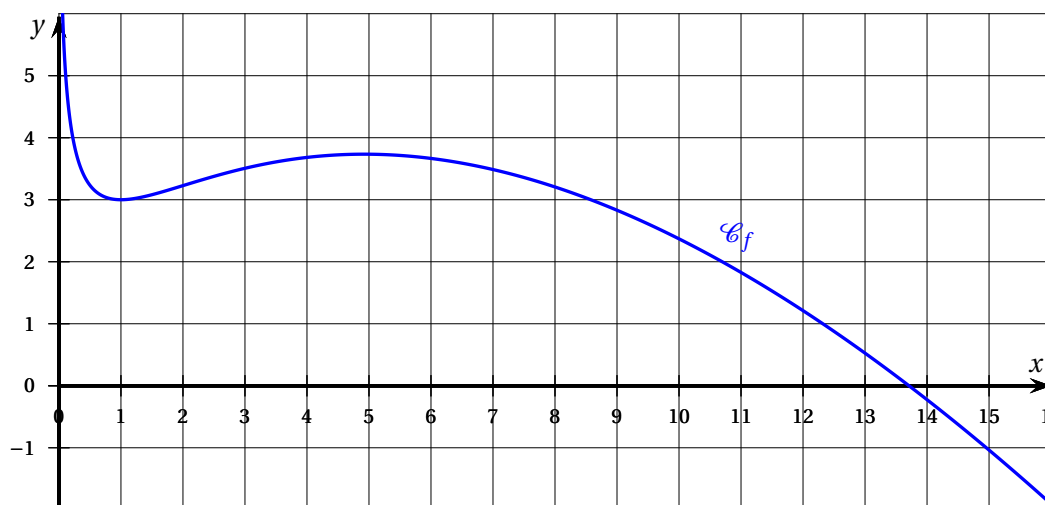
#### PARTIE B : Étude de la fonction $f$

On considère dans cette partie la fonction  $f$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$ , par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

La représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  de cette fonction  $f$  est donnée dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous. On admet que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .



1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  en justifiant votre démarche.
2.
  - a. Justifier que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ .
  - b. En déduire le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
3. On admet que, pour tout  $x > 0$ , la dérivée seconde de  $f$ , notée  $f''$ , est définie par  $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$ .  
Étudier la convexité de  $f$  et préciser les coordonnées du point d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$ .

**17 Nouvelle-Calédonie J1 - 26 octobre 2022****EXERCICE 1 7 points**

**Principaux domaines abordés :** fonctions, fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.

1.
  - a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .  
Interpréter graphiquement ce résultat.
  - b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2.
  - a. Déterminer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .
  - b. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
En déduire le tableau de variations de  $f$ .
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[4 ; 5]$ .
4. On admet que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

- a. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .  
On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$ .
- b. On note  $A$  le point de coordonnées  $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$ .  
Soit  $t$  un réel strictement positif tel que  $t \neq \sqrt{2}$ . Soit  $M$  le point de coordonnées  $(t ; f(t))$ .  
En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de  $t$ , les positions relatives du segment  $[AM]$  et de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**18 Nouvelle-Calédonie J2 - 27 octobre 2022****EXERCICE 2****7 points****Principaux domaines abordés :** fonctions, fonction logarithme.Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .On note  $f'$  sa dérivée,  $f''$  sa dérivée seconde et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1.
  - a. Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , on a  $f'(x) = \ln(x)$ .
  - b. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x = e$ .
  - c. Justifier que la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - d. En déduire la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la tangente  $T$ .
2.
  - a. Calculer la limite de la fonction  $f$  en 0.
  - b. Démontrer que la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est égale à  $+\infty$ .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
4.
  - a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ . On note  $\alpha$  cette solution.
  - b. Justifier que le réel  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]4,3; 4,4[$ .
  - c. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
5. On considère la fonction seuil suivante écrite dans le langage Python :  
On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien  $\ln$ .

```
def seuil(pas) :  
    x=4.3  
    while x*log(x) - x - 2 < 0:  
        x=x+pas  
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

## 19 Centres étrangers J2 - 14 mars 2023

### EXERCICE 2

**6 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1,5 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(2x + 3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

#### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $g$  définie sur  $] -1,5 ; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-1,5$ .  
On admet que la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$  est  $-\infty$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $] -1,5 ; +\infty[$ .
3.
  - a. Démontrer que, dans l'intervalle  $] -0,5 ; +\infty[$ , l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .
  - b. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

#### Partie B : Étude de la suite $(u_n)$

On admet que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -1,5 ; +\infty[$ .

1. Soit  $x$  un nombre réel. Montrer que si  $x \in [-1 ; \alpha]$  alors  $f(x) \in [-1 ; \alpha]$ .
2.
  - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

- b. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

**20 Métropole J1 - 20 mars 2023****EXERCICE 2****5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
2. On admet que, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x^2 \left(1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ .  
En déduire la limite :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$ .
4. Étudier les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et dresser son tableau de variations complet.  
On précisera la valeur exacte du minimum de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
5. Démontrer que, sur l'intervalle  $]0; 2]$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de  $\alpha$ ).
6. On admet que, sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de  $\beta$ ).  
En déduire le signe de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
7. Pour tout nombre réel  $k$ , on considère la fonction  $g_k$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

En s'aidant du tableau de variations de  $f$ , déterminer la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle la fonction  $g_k$  est positive sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**21 Centres étrangers J1 - 21 mars 2023****EXERCICE 1****5 points****Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
3.
  - a. Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif  $\alpha$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .
  - b. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
4. En déduire le tableau de signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x} \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0.
  - b. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
3. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif, on a  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
4. En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**Partie C**

Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la courbe représentative de la fonction  $\ln$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

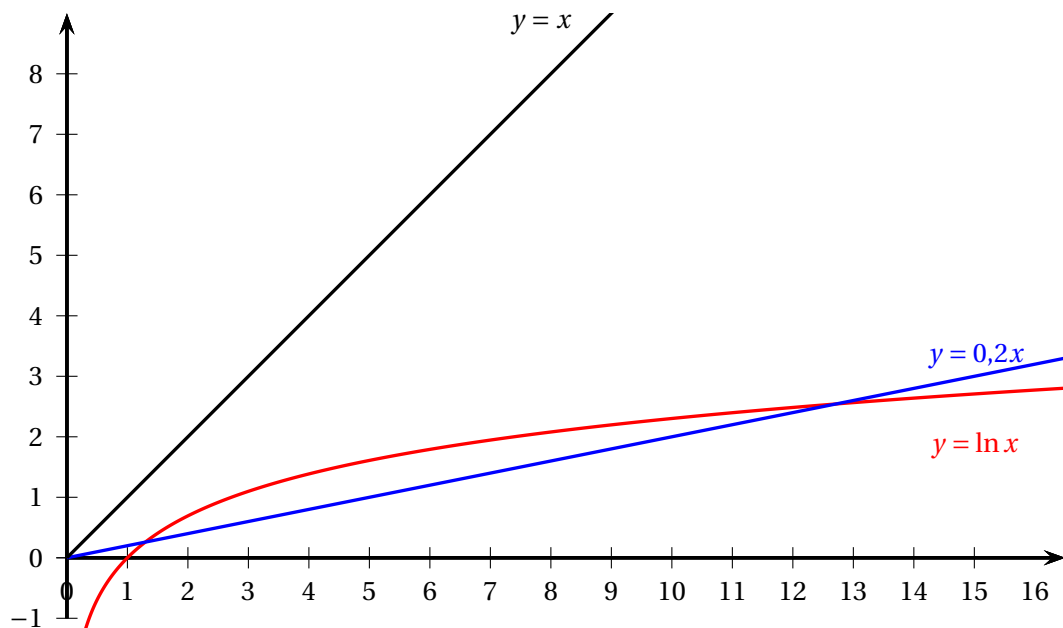
**22 Asie J1 - 23 mars 2023****EXERCICE 3****5 points**Soit  $k$  un réel strictement positif.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln(x) = kx$$

de paramètre  $k$ .**1. Conjectures graphiques :**

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation  $y = \ln(x)$ , la droite d'équation  $y = x$  ainsi que la droite d'équation  $y = 0,2x$  :



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation  $\ln(x) = kx$  pour  $k = 1$  puis pour  $k = 0,2$ .

**2. Étude du cas  $k = 1$  :**On considère la fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .**a.** Calculer  $f'(x)$ .**b.** Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.

Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

**c.** En déduire le nombre de solutions de l'équation  $\ln(x) = x$ .**3. Étude du cas général :** $k$  est un nombre réel strictement positif.On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

On admet que le tableau des variations de la fonction  $g$  est le suivant :

$x$	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$-\infty$

- a. Donner, en fonction du signe de  $g\left(\frac{1}{k}\right)$  le nombre de solutions de l'équation  $g(x) = 0$ .
- b. Calculer  $g\left(\frac{1}{k}\right)$  en fonction du réel  $k$ .
- c. Montrer que  $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$  équivaut à  $\ln(k) < -1$ .
- d. Déterminer l'ensemble des valeurs de  $k$  pour lesquelles l'équation  $\ln(x) = kx$  possède exactement deux solutions.
- e. Donner, selon les valeurs de  $k$ , le nombre de solutions de l'équation  $\ln(x) = kx$ .

## 23 La Réunion J1 - 28 mars 2023

### EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x).$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2.
  - a. Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :  $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$ .
  - b. Étudier le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
3.
  - a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]0; +\infty[$ .  
On notera  $\alpha$  cette solution.
  - b. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
4. On considère une primitive quelconque de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
On la note  $F$ .  
Peut-on affirmer que la fonction  $F$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $\left[ e^{\frac{1}{2}}; +\infty \right]$ ?  
Justifier.
5.
  - a. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .  
Quelle est la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à ses tangentes?
  - b. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.
  - c. Déduire des questions 5. a et 5. b que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

## 24 Nouvelle-Calédonie J1 - 28 août 2023

### EXERCICE 4 5 points

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal du plan.

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction  $f$  en 0 est égale à 0.  
**b.** Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Déterminer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
3. **a.** Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

- b.** En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de ses tangentes.
- c.** Dresser le tableau des variations de la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
(On admettra que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$ .)
4. **a.** Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$ .  
**b.** En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  ainsi que le tableau des variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
5. **a.** En utilisant l'égalité  $f'(\alpha) = 0$ , démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que  $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$ .

- b.** En déduire un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  du maximum de la fonction  $f$ .

## 25 Métropole J1 - 11 sept 2023

### EXERCICE 4

7 points

#### PARTIE A

On définit sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction  $g$  par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[ = I$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour  $x > 0$ , le signe de  $g'(x)$  est celui du trinôme du second degré  $(x^2 - 2x + 2)$ .
2. En déduire que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .
3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[0,5; 1]$ , que l'on notera  $\alpha$ .
4. On donne le tableau de signes de  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[ = I$  :

$x$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$0$	$+$

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

#### PARTIE B

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[ = I$  par :

$$f(x) = e^x \ln x.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ , on note  $f'$  sa fonction dérivée,  $f''$  sa fonction dérivée seconde et on admet que :  
pour tout nombre réel  $x > 0$ ,  $f'(x) = e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$ .  
Démontrer que, pour tout nombre réel  $x > 0$ , on a :  $f''(x) = e^x \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \right)$ .
2. On pourra remarquer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f''(x) = e^x \times g(x)$ , où  $g$  désigne la fonction étudiée dans la partie A.
3.
  - a. Dresser le tableau de signes de la fonction  $f''$  sur  $]0; +\infty[$ . Justifier.
  - b. Justifier que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un unique point d'inflexion A.
  - c. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Justifier.
4.
  - a. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - b. Montrer que  $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2} (1 - \alpha)$ .  
On rappelle que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$ .
  - c. Démontrer que  $f'(\alpha) > 0$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .
  - d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

## 26 Métropole J2 - 12 sept 2023

### EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

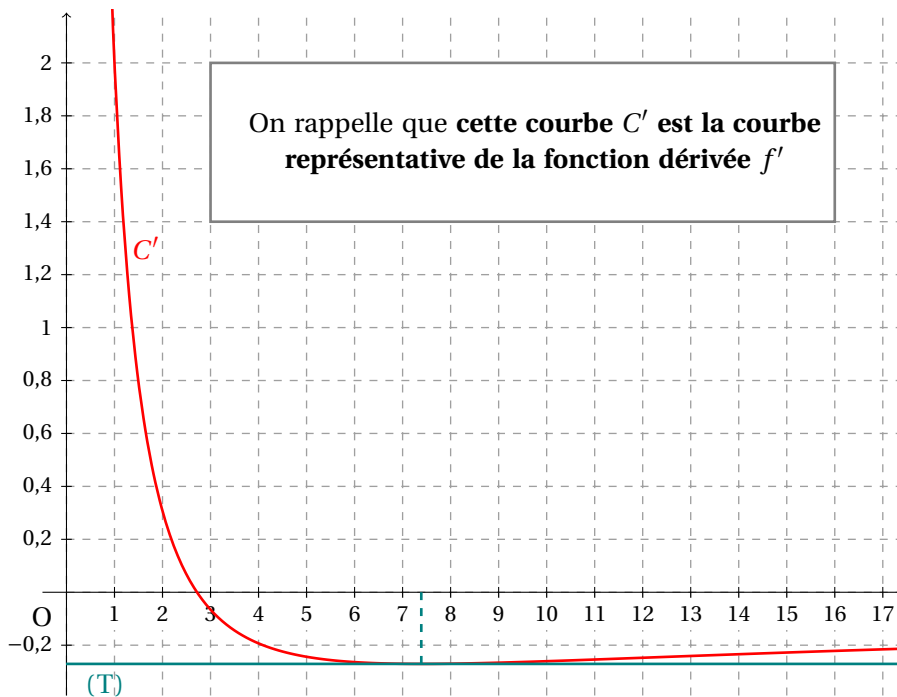
$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal et  $C'$  la courbe représentative de la fonction  $f'$ , fonction dérivée de la fonction  $f$ .

La **courbe  $C'$**  est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
  - a. le coefficient directeur de la tangente à  $C$  au point d'abscisse 1.
  - b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.
2.
  - a. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que la courbe  $C$  coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.
4.
  - a. Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$ .
  - b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
5. On note  $f''$  la dérivée seconde de  $f$  et on admet que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ ,  $f''(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2}$ .  
Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe  $C$ .

## 27 Amérique du Sud J1 - 26 sept 2023

### Exercice 1

5 points

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'ensemble  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

On admet que  $f$  est dérivable sur l'intervalle et on note  $f'$  sa fonction dérivée

1. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  et, en remarquant que  $f(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x))$ , justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
2. Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = -4x \ln(x)$ .
3. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , puis dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
4. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1; +\infty[$  et que  $\alpha \in [1; e]$ .

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution sur l'intervalle  $]0; 1]$ .

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction `from lycee import *` permet d'accéder à la fonction `ln`.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a=1
    b=2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else :
            a=(a+b)/2
    return (a,b)
```

Il écrit dans la console d'exécution :

```
>>> dichotomie(1)
```

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination)

- Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002)  
 Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002)  
 Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002)  
 Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002)

**Partie B**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.

On note  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans le plan rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$ .

2. Démontrer que la fonction  $g$  admet un maximum en  $x = \alpha$ .

On admet que  $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ .

3. On note  $T_1$  la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1 et on note  $T_\alpha$  la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse  $\alpha$ .

Déterminer, en fonction de  $\alpha$ , les coordonnées du point d'intersection des droites  $T_1$  et  $T_\alpha$ .

## 28 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2024

### EXERCICE 3

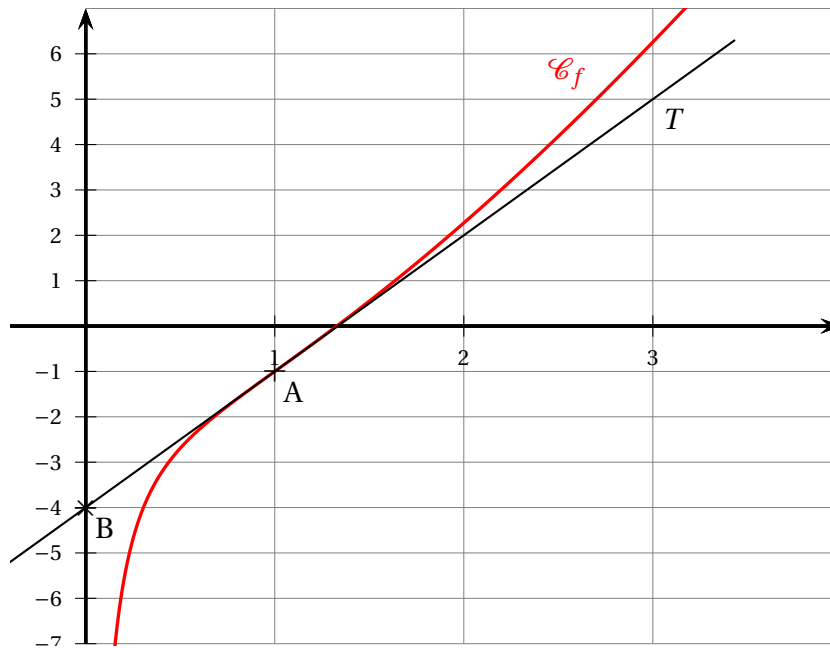
5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

#### Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative ( $\mathcal{C}_f$ ) de la fonction  $f$ , ainsi que la droite ( $T$ ), tangente à la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) au point A de coordonnées  $(1 ; -1)$ . Cette tangente passe également par le point B  $(0 ; -4)$ .



1. Lire graphiquement  $f'(1)$  et donner l'équation réduite de la tangente ( $T$ ).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) ?

#### Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de  $f$  en  $+\infty$ , puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - a. Déterminer  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - b. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3.
  - a. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - b. Étudier les variations de la fonction  $f'$ , puis le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

4. **a.** Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
- b.** Donner la valeur arrondie au centième de  $\alpha$  et montrer que  $\alpha$  vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

## 29 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2024

### Exercice 4

4 points

Soit  $a$  un réel strictement positif.

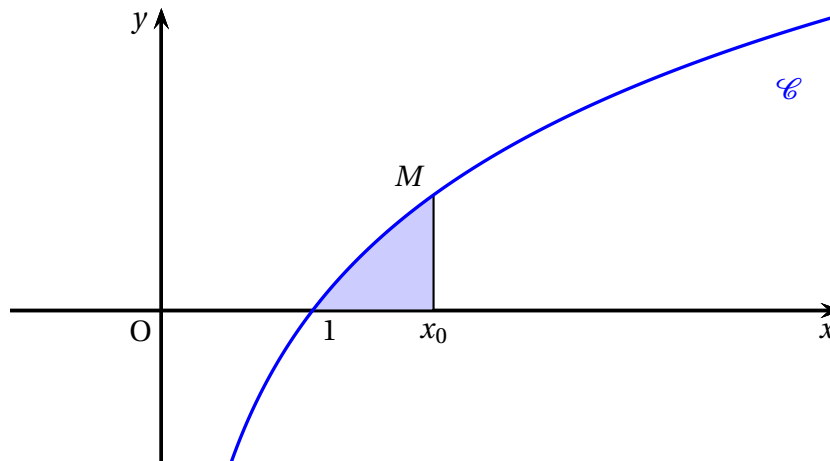
On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = a \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

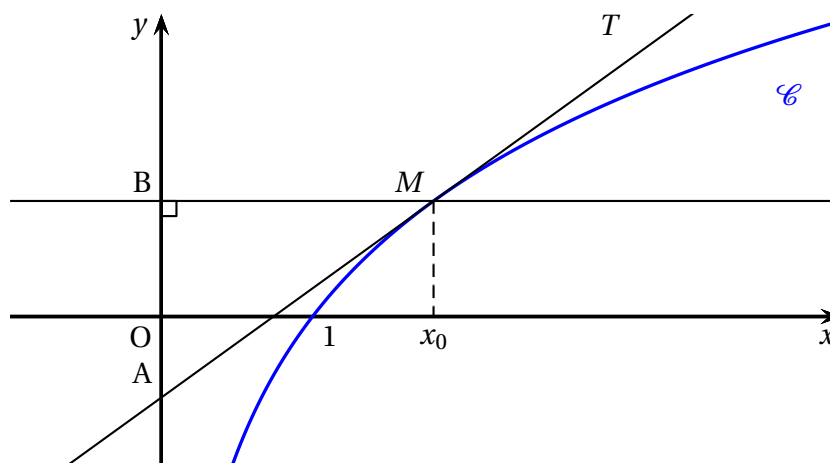
Soit  $x_0$  un réel strictement supérieur à 1.

- Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et de l'axe des abscisses.
- Vérifier que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = a[x \ln(x) - x]$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de  $a$  et de  $x_0$ .



On note  $T$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M$  d'abscisse  $x_0$ .

On appelle  $A$  le point d'intersection de la tangente  $T$  avec l'axe des ordonnées et  $B$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des ordonnées.



- Démontrer que la longueur  $AB$  est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de  $x_0$ ) que l'on déterminera.  
*Le candidat prendra soin d'explicitier sa démarche.*

**30 Asie – Sujet 2 – 11 juin 2024****EXERCICE 1****5,5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

**Partie A : Étude de la fonction  $f$** 

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Pour tout réel  $x$  strictement positif, calculer  $f'(x)$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

**Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation  $f(x) = x$** 

On considère dans cette partie la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , on note  $g'$  sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer  $g'(x)$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $g$ .

Les limites de la fonction  $g$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 1$ .

Résoudre, sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = x$ .

**Partie C : Étude d'une suite récurrente**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

**2.** Justifier que la suite  $(u_n)$  converge.

On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$  et on admet que  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) = \ell$ .

**3.** Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**31 Métropole – Sujet 1 – 19 juin 2024****EXERCICE 4****6 points****Partie A : étude de la fonction  $f$** 

La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , on note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

1.
  - a. Déterminer, en justifiant, les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
  - b. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$ .
  - c. Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
  - d. Étudier la convexité de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
2.
  - a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0 ; +\infty[$  une solution unique qu'on notera  $\alpha$  et justifier que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[1 ; 2]$ .
  - b. Déterminer le signe de  $f(x)$  pour  $x \in ]0 ; +\infty[$ .
  - c. Montrer que  $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$ .

**Partie B : étude de la fonction  $g$ .**

La fonction  $g$  est définie sur  $]0 ; 1]$  par :  $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$ .

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; 1]$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.

1. Calculer  $g'(x)$  pour  $x \in ]0 ; 1]$  puis vérifier que  $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ .
2.
  - a. Justifier que pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; \frac{1}{\alpha}[$ , on a  $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ .
  - b. On admet le tableau de signes suivant :

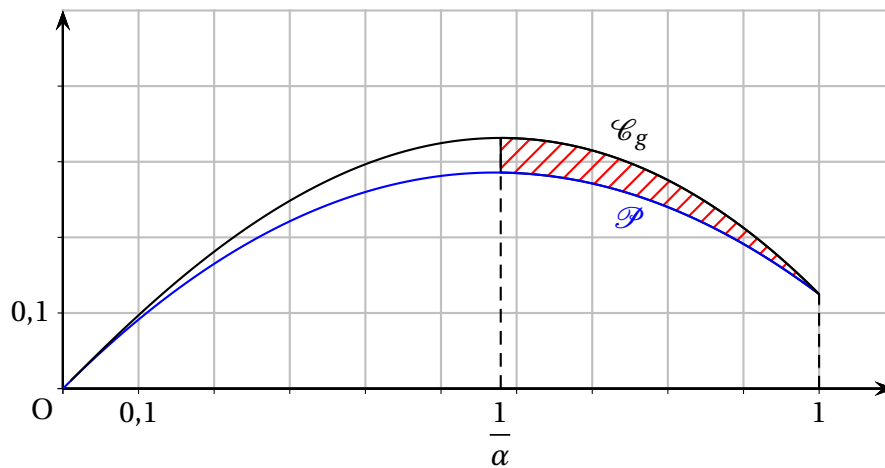
$x$	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

En déduire le tableau de variations de  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$ . Les images et les limites ne sont pas demandées.

**Partie C : un calcul d'aire.**

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe  $\mathcal{C}_g$  de la fonction  $g$ ;
- La parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$ .



On souhaite calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine hachuré compris entre les courbes  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{P}$ , et les droites d'équations  $x = \frac{1}{\alpha}$  et  $x = 1$ .

On rappelle que  $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$ .

1. **a.** Justifier la position relative des courbes  $C_g$  et  $\mathcal{P}$  sur l'intervalle  $]0 ; 1]$ .
- b.** Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de  $\alpha$  de l'aire  $\mathcal{A}$ .

**32 Métropole – Sujet 1 (secours) – 19 juin 2024****EXERCICE 3****6 points****Partie A : étude d'une fonction**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1),$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que pour tout nombre réel  $x > 0$ , on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

**Partie B : étude d'une suite**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n \geq 0$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .
4. On note  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .
5. a. Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier  $n$  à partir de laquelle  $u_n \leq h$ , où  $h$  est un nombre réel strictement positif.

```

from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
    n = 0
    u = 7
    while ... :
        n = n+1
        u = ...
    return n

```

- b.** Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

**Partie C : calcul intégral**

1. Étudier le signe de la fonction  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x) dx.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel  $x \in [2 ; 4]$ , on a l'encadrement :

$$0,5x - 1 \leq f(x) \leq 0,25x + 0,25.$$

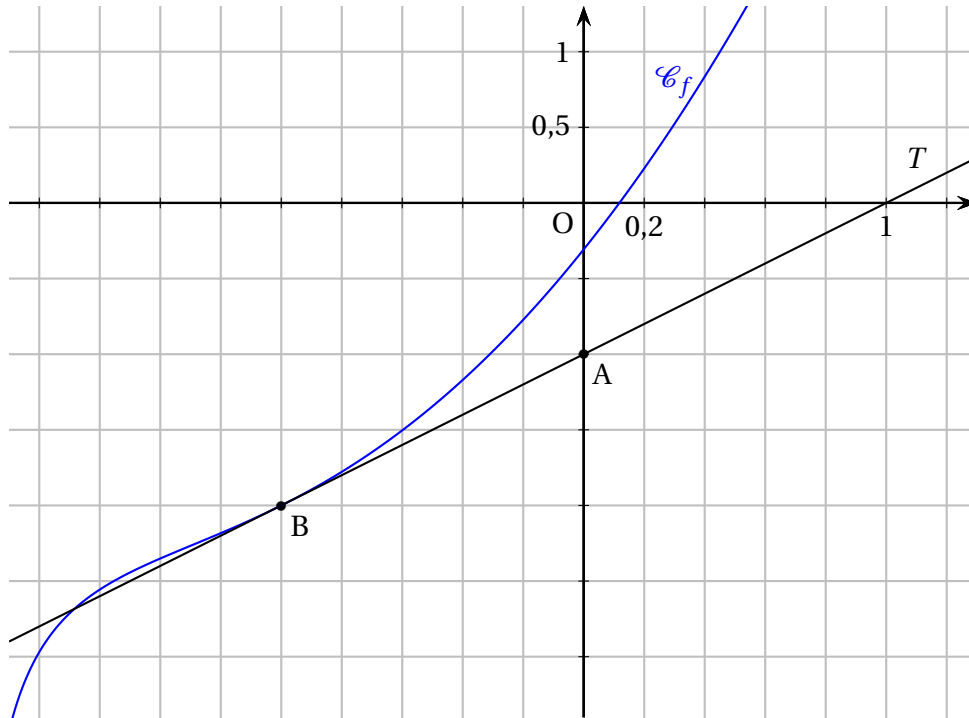
En déduire l'encadrement :

$$1 \leq I \leq 2.$$

**33 Métropole – Sujet 2 – 20 juin 2024****EXERCICE 3****6 points**

On considère une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur  $] -2 ; +\infty[$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan,  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  et sa tangente  $T$  au point B d'abscisse  $-1$ .  
On précise que la droite  $T$  passe par le point A(0 ;  $-1$ ).

**Partie A : exploitation du graphique**

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser  $f(-1)$  et  $f'(-1)$ .
2. La fonction  $f$  est-elle convexe sur son ensemble de définition? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  et donner une valeur arrondie à  $10^{-1}$  près d'une solution.

**Partie B : étude de la fonction  $f$** 

On considère que la fonction  $f$  est définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2),$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction  $f$  en  $-2$ .  
Interpréter graphiquement ce résultat.  
On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. Montrer que pour tout  $x > -2$ ,  $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$ .
3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $] -2 ; +\infty[$  puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $] -2 ; +\infty[$  et donner une valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
5. En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $] -2 ; +\infty[$ .
6. Montrer que  $\mathcal{C}_f$  admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

### Partie C : une distance minimale

Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par

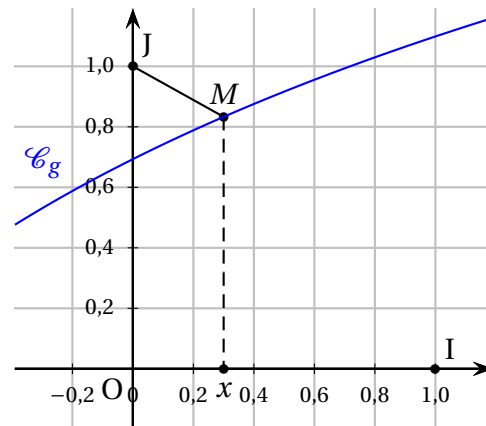
$$g(x) = \ln(x + 2).$$

On note  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , représentée ci-contre.

Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $x$ .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de  $x$  la distance  $JM$  est minimale.

On considère la fonction  $h$  définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par  $h(x) = JM^2$ .



1. Justifier que pour tout  $x > -2$ , on a :  $h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$ .
2. On admet que la fonction  $h$  est dérivable sur  $] -2 ; +\infty[$  et on note  $h'$  sa fonction dérivée.

On admet également que pour tout réel  $x > -2$ ,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$$

où  $f$  est la fonction étudiée en partie B.

- a. Dresser le tableau de variations de  $h$  sur  $] -2 ; +\infty[$ . Les limites ne sont pas demandées.
- b. En déduire que la valeur de  $x$  pour laquelle la distance  $JM$  est minimale est  $\alpha$  où  $\alpha$  est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
3. On notera  $M_\alpha$  le point de  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $\alpha$ .
  - a. Montrer que  $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$ .
  - b. En déduire que la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point  $M_\alpha$  et la droite  $(JM_\alpha)$  sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à  $-1$ .

### 34 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025

#### EXERCICE 3

6 points

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-1$ .
2. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  puis en déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[2 ; 6,5]$ .
4. On considère  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[2 ; 6,5]$  par  $h(x) = f(x) - x$ .  
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction  $h$  :

$x$	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [2 ; 6,5]$ .

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```

from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)

```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande  $\log(x)$  renvoie la valeur  $\ln x$ ;
  - la commande  $c**d$  renvoie la valeur de  $c^d$ .
- a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`.  
On donnera les valeurs arrondies au centième.
  - b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

**Partie B**

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$ , et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ .
3. On rappelle que le réel  $\alpha$ , défini dans la partie A, est la solution de l'équation  $h(x) = 0$  sur l'intervalle  $[2; 6,5]$ .  
Justifier que  $\ell = \alpha$ .

### 35 Métropole – Sujet 1 – 17 juin 2025

#### EXERCICE 2

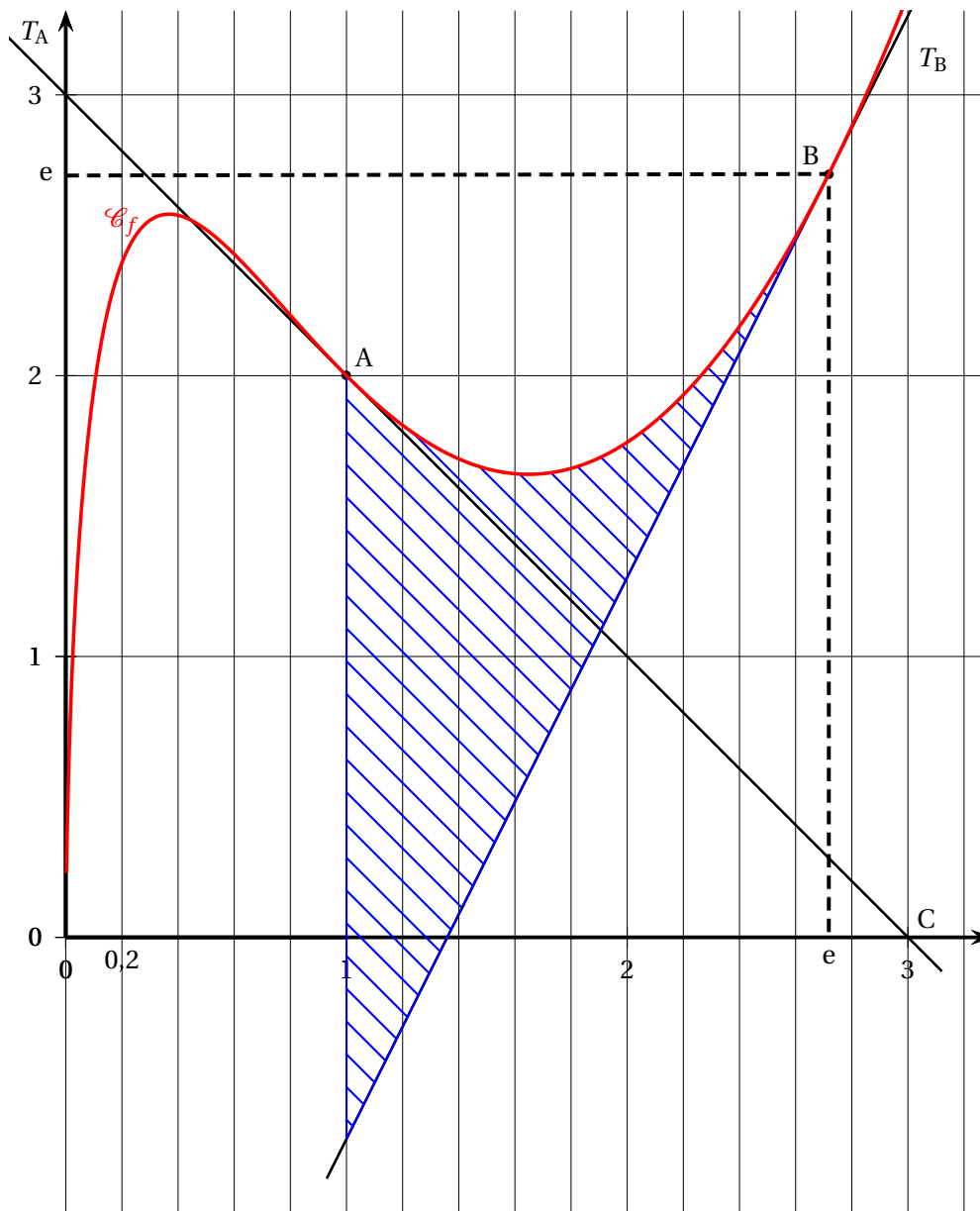
6 points

On considère une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée et  $f''$  sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de  $f$ , notée  $\mathcal{C}_f$  sur l'intervalle  $]0; 3]$ ;
- la droite  $T_A$ , tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(1; 2)$ ;
- la droite  $T_B$  tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $B(e; e)$ .

On précise par ailleurs que la tangente  $T_A$  passe par le point  $C(3; 0)$ .



#### Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé  $f'(1)$ .
2. Combien de solutions l'équation  $f'(x) = 0$  admet-elle dans l'intervalle  $]0; 3]$ ?
3. Quel est le signe de  $f''(0,2)$ ?

**Partie B : étude de la fonction  $f$**

On admet dans cette partie que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2X^2 - 3X + 2 = 0$ .  
En déduire que  $\mathcal{C}_f$  ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
On admettra que la limite de  $f$  en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$ .
  - a. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$ .
  - b. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
  - c. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de la tangente  $T_B$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

**Partie C : Calcul d'aire**

1. Justifier que la tangente  $T_B$  a pour équation réduite  $y = 2x - e$ .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3. On note  $\mathcal{A}$  l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la tangente  $T_B$ , et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$ .

On admet que  $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2 - 1}{4}$ .

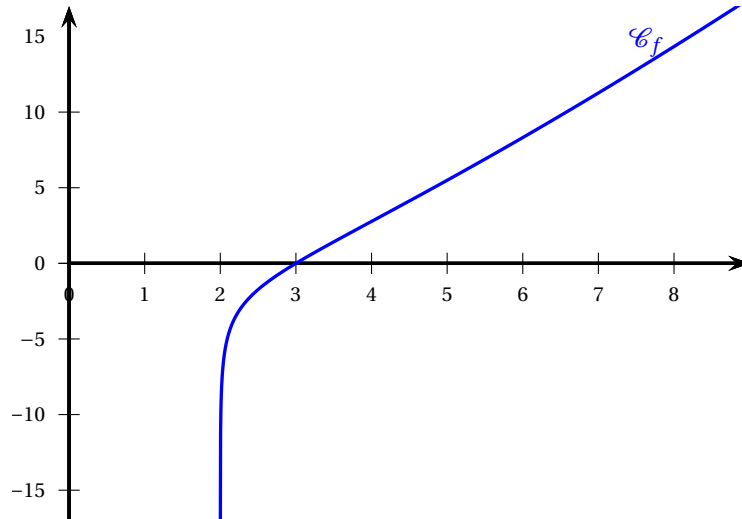
En déduire la valeur exacte de  $\mathcal{A}$  en unité d'aire.

**36 Polynésie – Sujet 2 – 18 juin 2025****EXERCICE 2****5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]2; +\infty[$  par

$$f(x) = x \ln(x - 2).$$

Une partie de la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de  $f$  ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  sur  $]2; +\infty[$ .
3. Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$ .

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?

4. Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à  $]2; +\infty[$  :

$$f'(x) = \ln(x - 2) + \frac{x}{x - 2}.$$

5. On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]2; +\infty[$  par  $g(x) = f'(x)$ .
  - a. Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à  $]2; +\infty[$ , on a :

$$g'(x) = \frac{x - 4}{(x - 2)^2}.$$

- b. On admet que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .  
En déduire le tableau des variations de la fonction  $g$  sur  $]2; +\infty[$ . On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction  $g$ .
  - c. En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à  $]2; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .
  - d. En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]2; +\infty[$ .
6. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]2; +\infty[$  et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction  $f$ .
  7. Combien de valeurs de  $x$  existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de  $f$  admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

### 37 Métropole – Sujet 2 – 10 septembre 2025

#### EXERCICE 3

4 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; 8]$  par

$$f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$$

Soit  $C_f$  la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$ .
2. En déduire que pour tout  $x \in ]0; 8]$ , on a  $f(x) \geq 0$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

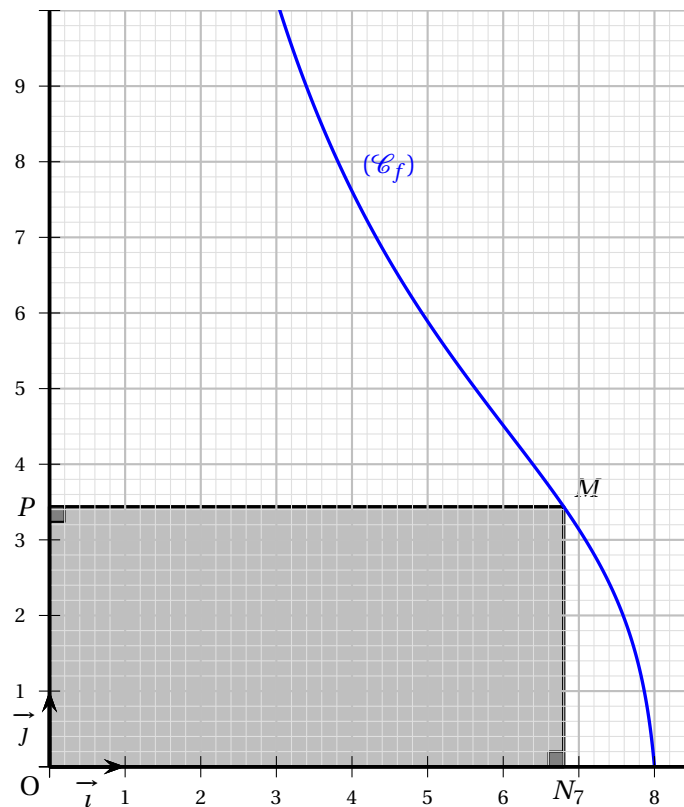
#### Partie B

La courbe  $C_f$  est représentée ci-dessous.

Soit  $M$  le point de  $C_f$  d'abscisse  $x$  avec  $x \in ]0; 8]$ .

On appelle  $N$  et  $P$  les projetés orthogonaux du point  $M$  respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire  $\mathcal{A}(x)$  du rectangle  $ONMP$ .



1. Donner les coordonnées des points  $N$  et  $P$  en fonction de  $x$ .
2. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; 8]$ ,

$$\mathcal{A}(x) = 10 \ln(-x^2 + 7x + 9)$$

3. Existe-t-il une position du point  $M$  pour laquelle laire du rectangle  $ONMP$  est maximale? Si elle existe, déterminer cette position.

### Partie C

On considère un réel strictement positif  $k$ .

On souhaite déterminer la plus petite valeur de  $x$ , approchée au dixième, appartenant à  $[3,5; 8]$  pour laquelle laire  $\mathcal{A}(x)$  devient inférieure ou égale à  $k$ .

Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.

Pour rappel, en langage Python,  $\ln(x)$  s'écrit `log(x)`.

```
1  from math import *
2
3  def A(x) :
4      return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)
5
6  def pluspetitevaleur(k) :
7      x = 3.5
8      while A(x)..... :
9          x = x + 0.1
10     return .....
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.
2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)`?
3. Que se passe-t-il lorsque  $k = 35$ ? Justifier.

**38 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025****EXERCICE 3****5 points**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \ln(9)$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f(2 \ln(2)) = 2 \ln(2)$ .
3. Montrer que  $u_1 = \ln(5)$ .
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.
6.
  - a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $X^2 - X - 2 = 0$ .
  - b. En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = x$ .
- d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### 39 Nouvelle-Calédonie – Sujet 2 – 21 novembre 2025

#### EXERCICE 4

5 points

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ , on a :

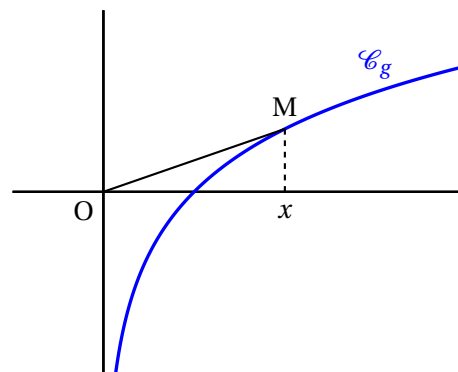
$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
4.
  - a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution, notée  $\alpha$ , sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - b. Donner un encadrement du réel  $\alpha$  d'amplitude 0,01.
  - c. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
5. On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel  $x$  strictement positif et le point M de la courbe  $\mathcal{C}_g$  d'abscisse  $x$ . On note OM la distance entre les points O et M.

- a. Exprimer la quantité  $OM^2$  en fonction du réel  $x$ .
- b. Montrer que, lorsque le réel  $x$  parcourt l'intervalle  $]0; +\infty[$ , la quantité  $OM^2$  admet un minimum en  $\alpha$ .
- c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel  $x$  parcourt l'intervalle  $]0; +\infty[$ , est appelée distance du point O à la courbe  $\mathcal{C}_g$ . On note  $d$  cette distance.  
Exprimer  $d$  à l'aide de  $\alpha$ .



## 40 Amérique du Nord – Jour 1 – 20 mai 2026

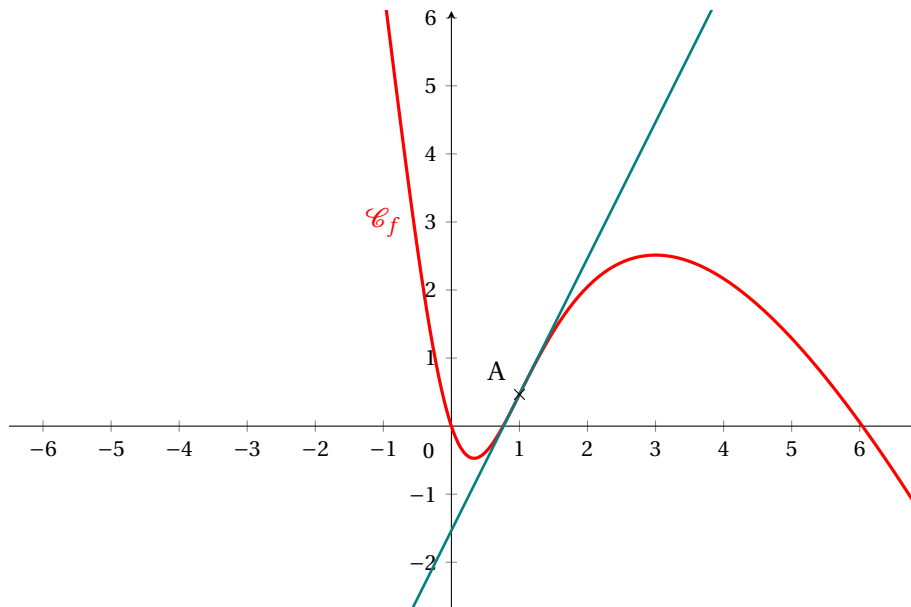
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$$

et on admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction  $f$ , les intervalles de  $\mathbb{R}$  sur lesquels la fonction  $f$  semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
3. a. Démontrer que, pour tout  $x$  réel strictement positif,

$$f(x) = x \left( 10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

- b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
4. a. Démontrer que pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$ .
- b. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout réel  $x$ ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$

- a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
- b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A d'abscisse 1.
- c. En déduire que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$ .

## 41 Amérique de Nord – Jour 2 – 21 mai 2026

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $g(x) = x \ln x$ .
  - a. Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$ .
  - b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - a. Démontrer que sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$ .
  - b. En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; 1]$ .
4. On considère l'équation  $f(x) = 2$ .
  - a. Justifier que, sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , cette équation admet une unique solution.  
On note  $\alpha$  cette solution.
  - b. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,1$ .
5. Soit  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; 1]$ .
  - a. Donner une interprétation géométrique de  $\int_a^1 f(x) dx$ .
  - b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_1^a x \ln x dx.$$

- c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

- d. Déterminer la limite de  $\int_a^1 f(x) dx$  quand  $a$  tend vers  $0$ .

## 42 Centres Étrangers – Jour 1 – 10 juin 2026

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa fonction dérivée et  $f''$  sa fonction dérivée seconde.

### Partie A

1.
  - a. Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Pour tout réel strictement positif  $x$ , démontrer que

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.
4. Déterminer l'équation réduite de la droite  $\Delta$ , tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A d'abscisse 1.
5. Vérifier que pour tout réel strictement positif  $x$ , on a

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\ln(x)}{x^4}$$

6.
  - a. Étudier la convexité de la fonction  $f$  en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
  - b. En déduire que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; e^{\frac{5}{6}}]$ , on a

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

7. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $[e^{\frac{5}{6}}; +\infty[$ , on a aussi

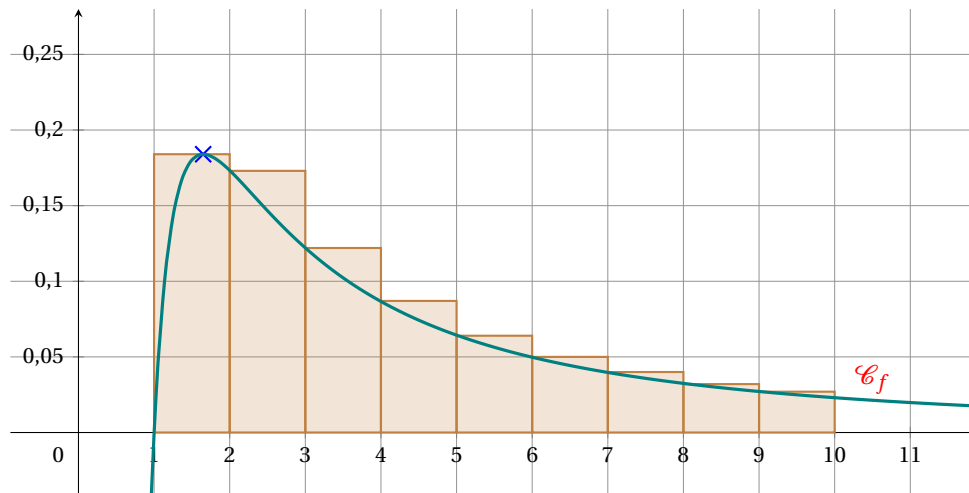
$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

### Partie B

On considère la suite  $(I_n)$  définie, pour tout entier naturel non nul  $n$ , par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

1. Donner une interprétation graphique de  $I_n$  pour  $n$  un entier naturel non nul.
2. Démontrer que la suite  $(I_n)$  est croissante.
3. On souhaite calculer une approximation de  $\int_1^{10} f(x) dx$  en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```

from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
    S =...
print(S)

```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

5. Calculer la limite de la suite  $(I_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### 43 Centres Étrangers – Jour 2 – 11 juin 2026

#### Partie A

On note  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x).$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .
2. On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  par :

$$g(x) = f(x) - x$$

On admet que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

- a. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .
- b. Donner la valeur de  $\alpha$  arrondie au centième.
- c. En déduire le tableau de signes de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

#### Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.

On définit une suite  $(a_n)$  par son premier terme  $a_0 > 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On étudie le cas où  $2 \leq a_0 \leq \alpha$ , où  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$ .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $2 \leq a_n \leq \alpha$ .
2. Démontrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.
3. Démontrer que la suite  $(a_n)$  converge.
4. Démontrer que la limite de la suite  $(a_n)$  est  $\alpha$ .

#### Partie C

Dans cette partie, on prend  $a_0 = 2$ .

La suite  $(a_n)$  est ainsi définie par  $a_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On note  $(b_n)$  la suite définie par  $b_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$b_{n+1} = \ln(3b_n^2 + 2b_n)$$

On admet que la suite  $(b_n)$  est strictement décroissante et qu'elle converge vers  $\alpha$ .

1. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $a_n \leq b_n$ .
2. On considère le script ci-dessous écrit en langage Python.

```
from math import *
def algo(p):
    a = 2
    b = 10
    n = 0
    while b - a > 10**(-p):
        a = log(3*a**2 + 2*a)
        b = log(3*b**2 + 2*b)
        n = n + 1
    return (n,a)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande `log(c)` renvoie la valeur de  $\ln(c)$ ;
  - la commande `a**2` renvoie la valeur de  $a^2$ .
- a.** Donner les valeurs renvoyées par l'instruction `algo(2)`.  
*On arrondira si besoin les valeurs au millième.*
- b.** Interpréter les valeurs renvoyées dans le contexte de l'exercice.