∽ Baccalauréat spécialité ∽

Thème : Étude de la fonction exponentielle

Sujets depuis 2021

Table des matières

1 Amérique du Nord - 28 mai 2019 4

2 Polynésie - 2 juin 2021 5

3 Asie 1 - 7 juin 2021 7

4 Asie 2 - 7 juin 2021 8

5 Centres étrangers J1 - 9 juin 2021 9

6 Centres étrangers candidats libres J1 - 10 juin 2021 10

7 Centres étrangers candidats libres J1 - 10 juin 2021 11

8 Métropole Antilles-Guyane La Réunion J1 - 7 juin 2021 13

9 Métropole Antilles–Guyane La Réunion J1 - 8 juin 2021 14

10 Métropole J2 - 13 septembre 2021 16

11 Métropole J1 - 11 mai 2022 18

12 Centres étrangers J1 - 11 mai 2022 20

13 Métropole J2 - 12 mai 2022 22

14 Centres étrangers J1 - 18 mai 2022 25

15 Centres étrangers J1 - 18 mai 2022 26

16 Amérique du Nord J1 - 18 mai 2022 27

17 Amérique du Nord J2 - 19 mai 2022 28

18 Métropole, Antilles-Guyane J1 - 8 septembre 2022 29

19 Nouvelle-Calédonie J1 - 26 octobre 2022 30

20 Centres étrangers J1 - 13 mars 2023 31

21 Polynésie J1 - 13 mars 2023 32

22 Polynésie J2 - 14 mars 2023 33

23 Métropole J2 - 21 mars 2023 35

24 Centres étrangers J2 - 22 mars 2023 36

25 Asie J2 - 24 mars 2023 38
26 Amérique du Nord J1 - 27 mars 2023 40
27 Amérique du Nord J2 - 28 mars 2023 41
28 Nouvelle-Calédonie J2 - 29 août 2023 43
29 Polynésie - 7 sept 2023 44
30 Amérique du Sud J2 - 27 sept 2023 46
31 Amérique du Nord J1 - 21 mai 2024 47
32 Centres étrangers – Sujet 1 – 5 juin 2024 48
33 Centres étrangers – Sujet 2 – 6 juin 2024 50
34 Centres étrangers (Suède) – 7 juin 2024 51
35 Asie – Sujet 1 – 10 juin 2024 53
36 Polynésie – Sujet 1 – 19 juin 2024 56
37 Métropole Antilles-Guyane – 11 septembre 2024 57
38 Métropole Antilles-Guyane – 12 septembre 2024 59
39 Amérique du Sud – Sujet 1 – 21 novembre 2024 61
40 Amérique du Sud – Sujet 2 – 22 novembre 2024 62
41 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2025 63
42 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2025 65
43 Amérique du Nord – Sujet secours – 22 mai 2025 67
44 Asie – Sujet 1 – 11 juin 2025 68
45 Asie – Sujet 2 – 12 juin 2025 69
46 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025 71
47 Centres étrangers – Sujet 2 – 13 juin 2025 72
48 Polynésie – Sujet 1 – 17 juin 2025 74
49 Métropole – Sujet 2 – 18 juin 2025 76
50 Polynésie – 2 septembre 2025 79
51 Asie – 5 septembre 2025 81
52 Métropole/Amérique du Nord – Sujet 1 – 9 septembre 2025 82
53 Amérique du Sud – Sujet 1 – 13 novembre 2025 83
54 Amérique du Sud – Sujet 2 – 14 novembre 2025 85

55 Nouvelle-Calédonie – Sujet 1 – 20 novembre 2025 **87**

56 Centres Étrangers – Jour 2 – 11 juin 2026 **89**

1 Amérique du Nord - 28 mai 2019

Y **Exercice A** **5 points**

Principaux domaines abordés :
• Fonction exponentielle • Convexité

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)^2 = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (3 - x)\mathrm{e}^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

Affirmation 3 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \frac{3}{x} = 0$.

Affirmation 4 : L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.

Affirmation 5 : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + \mathrm{e}^x$ est convexe.

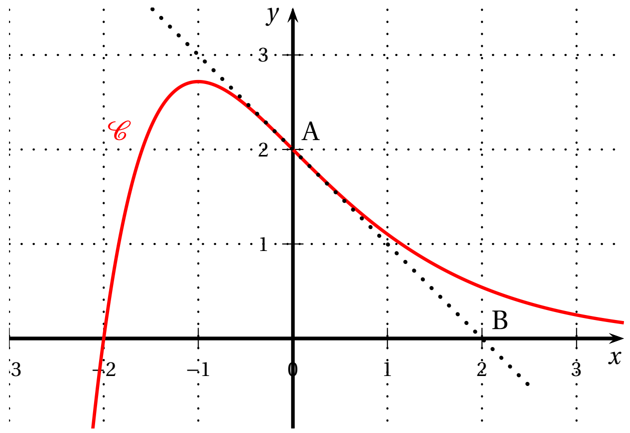
2 Polynésie - 2 juin 2021

EXERCICE A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) : $y' = -y$.
2. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

   On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.

   On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

   a. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

   b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$?

3 Asie 1 - 7 juin 2021

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Étude de fonction, fonction exponentielle
– Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. **a.** Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   b. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   c. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1+9\,\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\,\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+9\,\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en uvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.

4 Asie 2 - 7 juin 2021

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– Suites
– Équations différentielles

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0,05\,(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1,95$.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.
   b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.
D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0,05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.
Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$L(t) = 20 - 19\,\mathrm{e}^{-0,05t}.$$

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   a. Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
   b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
   Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

5 Centres étrangers J1 - 9 juin 2021

EXERCICE B - Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x :
   $$g'(x) = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$
2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle
   $$(E) : \qquad 3y' + y = 0.$$
   Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point M$(0\,;2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$
   et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M$(0\,;2)$ admet une équation de la forme :
   $$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$
   b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.
   Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.
2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

6 Centres étrangers candidats libres J1 - 10 juin 2021

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. **a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,98$ dont on précisera le premier terme.

   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 12500 - 500\,\mathrm{e}^{-0,02x+1,4},$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

7 Centres étrangers candidats libres J1 - 10 juin 2021

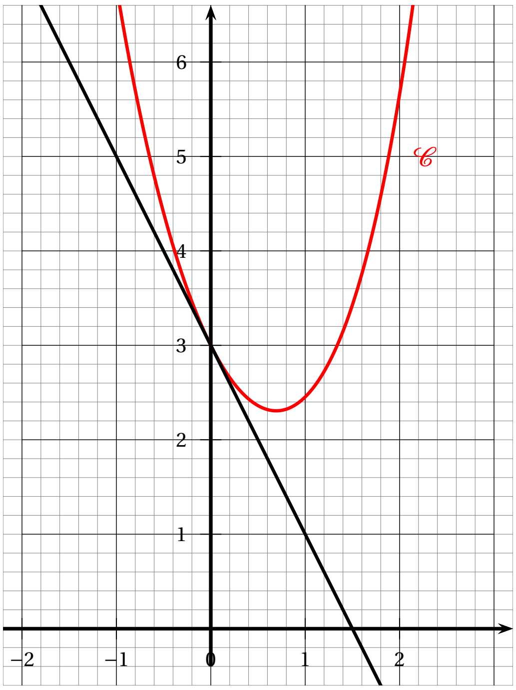
EXERCICE B - Équation différentielle

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 2\mathrm{e}^{x} - x - 1$$

a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} - x + 2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E). est solution de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1~;~+\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.
3. On admettra que, pour tout $x \in [1~;~+\infty[$, $\mathrm{e}^{x} - 2 > 0$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1~;~+\infty[$.

8 Métropole Antilles-Guyane La Réunion J1 - 7 juin 2021

EXERCICE B

Principaux domaines abordés : Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère léquation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\,\mathrm{e}^{x}.$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x}$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.

On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. . Étude de la fonction u

a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

9 Métropole Antilles–Guyane La Réunion J1 - 8 juin 2021

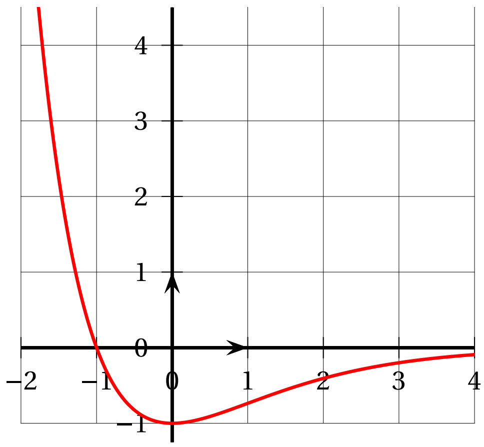
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + 2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.
   Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
   On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

10 Métropole J2 - 13 septembre 2021

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\,;\,\mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.

   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.

   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :

   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

   a. Montrer que, pour tout nombre réel t,

   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

   b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.

   Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\text{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

11 Métropole J1 - 11 mai 2022

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle, suites**

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0 ; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
   c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
   Quelle est alors cette quantité maximale ?
2. **a.** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2 ; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.
   b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
   Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

   c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.

   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.

   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

12 Centres étrangers J1 - 11 mai 2022

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : Fonction exponentielle et suite**

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3. En déduire que :
   si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ alors $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.
Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathscr{C}_f$ de même abscisse.
On s'intéresse aux points d'abscisse $\dfrac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

   où h est la fonction définie à la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n).

n	u_n
1	0,718 281 828
2	0,148 721 271
3	0,062 279 092
4	0,034 025 417
5	0,021 402 758
6	0,014 693 746
7	0,010 707 852
8	0,008 148 453
9	0,006 407 958
10	0,005 170 918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2}.

13 Métropole J2 - 12 mai 2022

Exercice 4 **(7 points)** **Thèmes : fonctions numériques, fonction exponentielle**

Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 0,06\left(-x^2+13,7x\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0,15x+2,2)\mathrm{e}^{0,2x}-2,2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

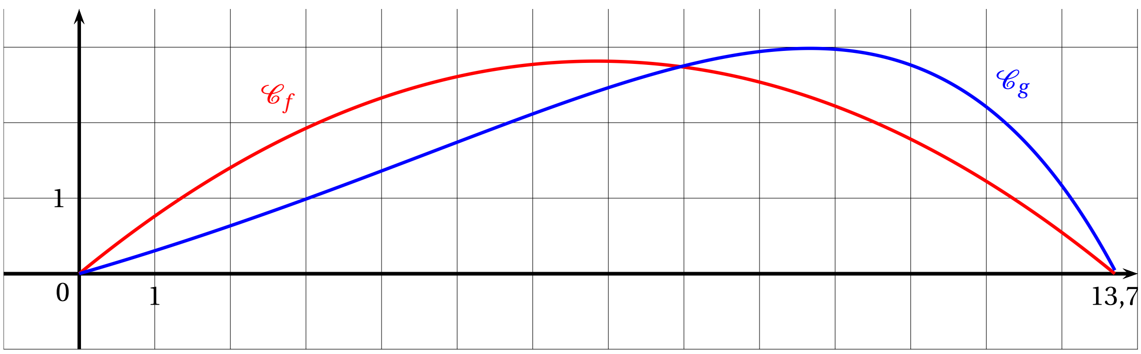
x	0	$6,85$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$f(6,85)$	↘ $-\infty$

   a. Justifier la limite de f en $+\infty$.
   b. Justifier les variations de la fonction f.
   c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

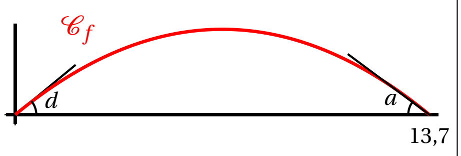
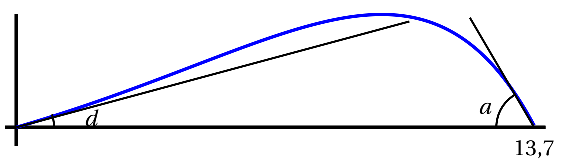
2. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ on a :
   $g'(x) = (-0,03x+0,29)\mathrm{e}^{0,2x}$.
   c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.
   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.
On admettra ici que $13,7$ est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.
On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[0; 13,7]$.



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 < x < 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ $0,914$ mètre).
On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.
De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse $13,7$. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.
Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_f$	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_g$.
	

1. *Première modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
   Selon ce modèle :
   a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
   b. Vérifier que $f'(0) = 0,822$.
   c. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
   d. Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?
2. *Seconde modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
   Selon ce modèle :
   a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
   On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx -1,87$.
   b. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
   c. Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

   Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connait sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$\tan(\theta)$	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	$\tan(\theta)$	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

14 Centres étrangers J1 - 18 mai 2022

EXERCICE 3 6 points **Thème : Fonction exponentielle**

Principaux domaines abordés : Suites ; Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

   b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle

   $]4 + 2\ln(2)~;~+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1~;~0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. **a.** On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.

   Démontrer que $\ell = 4$.

   b.

   On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :
  u = 0
  n = 0
  while u ⩽ a:
    u=1 + u - exp(0.5*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

   L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

15 Centres étrangers J1 - 18 mai 2022

EXERCICE 4 6 points **Thème : Fonction exponentielle**

Principaux domaines abordés : Géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(5 ; 0 ; −1), B(1 ; 4 ; −1), C(1 ; 0 ; 3), D(5 ; 4 ; 3) et E(10 ; 9 ; 8).

1. **a.** Soit R le milieu du segment [AB].
Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0.$$

c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathcal{P}_1$ et que EA = EB .

2. On considère le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 1+t \quad (t \in \mathbb{R}).\\ z &=& t \end{array}\right.$$

3. On considère le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathcal{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. **a.** Justifier que ΩA = ΩB = ΩC = ΩD.

b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

16 Amérique du Nord J1 - 18 mai 2022

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : fonction exponentielle**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

   Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1-x^2\right)$.

   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.
5. **Affirmation 5 :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x} = 0$.
6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x, $1+\mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x$.

17 Amérique du Nord J2 - 19 mai 2022

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : fonctions, fonction exponentielle**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

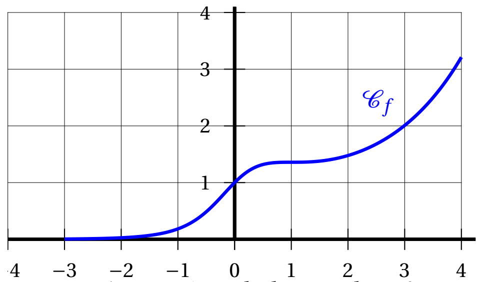
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

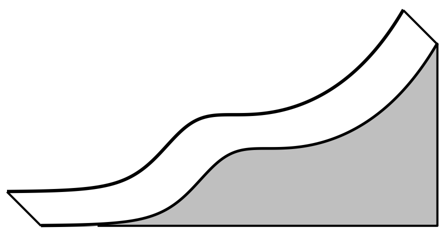
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
   b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

18 Métropole, Antilles-Guyane J1 - 8 septembre 2022

Exercice 3 7 points **Thème fonctions logarithmes et exponentielles, suites**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
   b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
3. Soit k un nombre réel positif ou nul.
   a. Montrer que, si $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\text{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ \text{e}]$.
   b. Si $k > \dfrac{1}{\text{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \text{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \text{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \text{e}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que f est solution de l'équation :

$$\text{e}^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).

19 Nouvelle-Calédonie J1 - 26 octobre 2022

EXERCICE 2 7 points

Principaux domaines abordés : suites ; fonctions, fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 \mathrm{e}^{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer u_1 puis u_2.
On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def  fonc (n):
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3}.

2. a. Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 \mathrm{e}^{x}(x+3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0 $\searrow$	$-27\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$ $+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer ℓ. (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 \mathrm{e}^{x} - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$).

20 Centres étrangers J1 - 13 mars 2023

EXERCICE 4 **3 points**

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

21 Polynésie J1 - 13 mars 2023

EXERCICE 3 5 points **Thème : fonction exponentielle, algorithmique**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^x - x$ est convexe.
2. **Affirmation :** L'équation $(2\text{e}^x - 6)\,(\text{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. **Affirmation :**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{e}^{2x} - 1}{\text{e}^x - x} = 0.$$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x + 5)\text{e}^{3x}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = (2x + 1)\text{e}^{3x} + 4$.
Affirmation : F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
On rappelle que `len`(L) représente la longueur de la liste L.

```
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S / len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere`([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5]) renvoie 50.

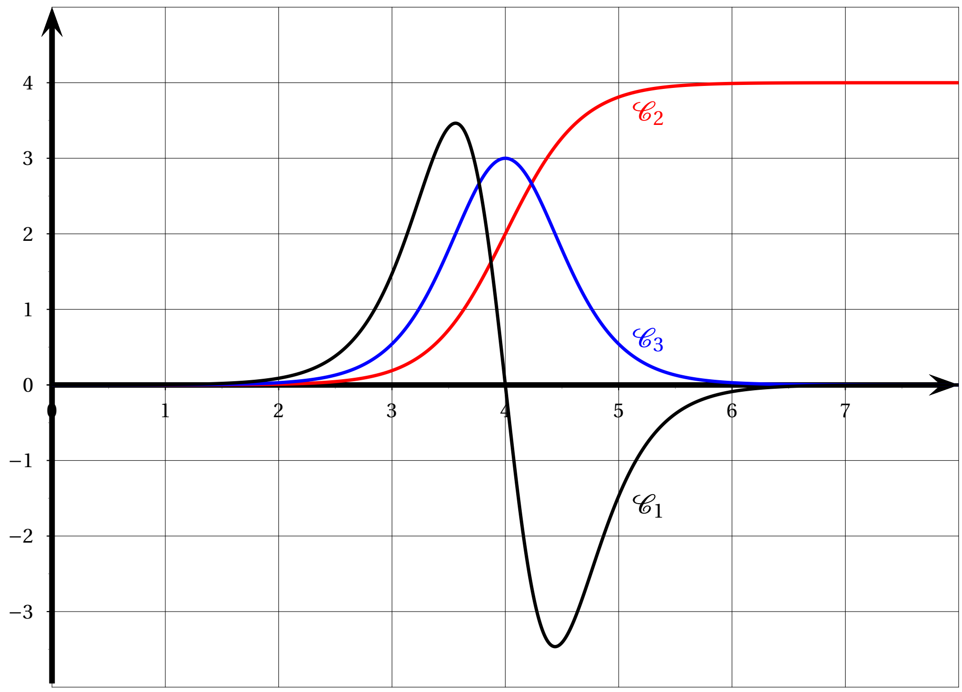
22 Polynésie J2 - 14 mars 2023

EXERCICE 3 5 points **Thème : étude de fonctions**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

Soit un réel k strictement positif.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^{-kx}}.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,
2. Prouver que $g'(0) = k$.
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

⊳ Calcul formel	
1	g(x) =4/(1 + e^(-kx)) $\to g(x) = \dfrac{4}{\text{e}^{-kx}+1}$
2	Simplifier($g''(x)$) $\to g''(x) = -4\text{e}^{kx}\left(\text{e}^{kx}-1\right)\dfrac{k^2}{\left(\text{e}^{kx}+1\right)^3}$

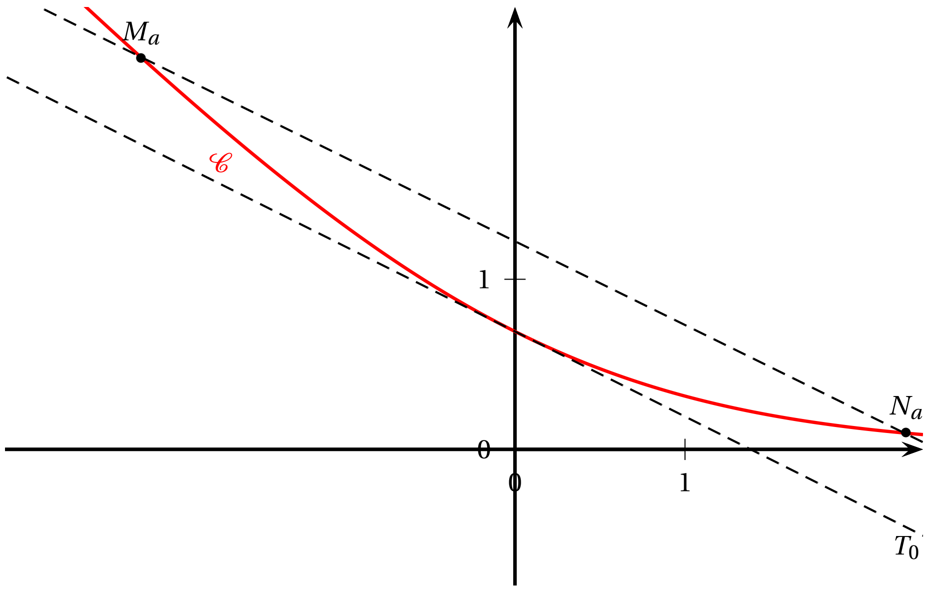
23 Métropole J2 - 21 mars 2023

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
   d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
   a. Déterminer une équation de la tangente T_0.
   b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :
   $$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$
3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
   On a donc : $M_a\left(-a\,;\,f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;\,f(a)\right)$.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
   b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

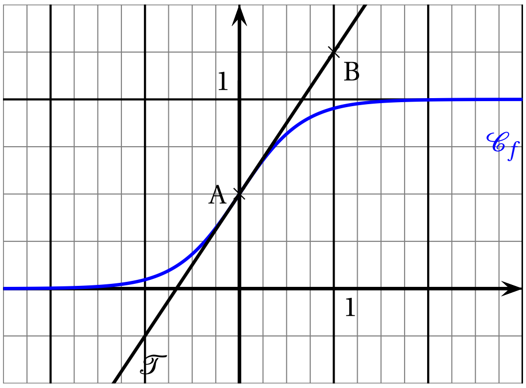
24 Centres étrangers J2 - 22 mars 2023

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{5}{4}\right)$.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   b. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   c. En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Justifier la réponse.

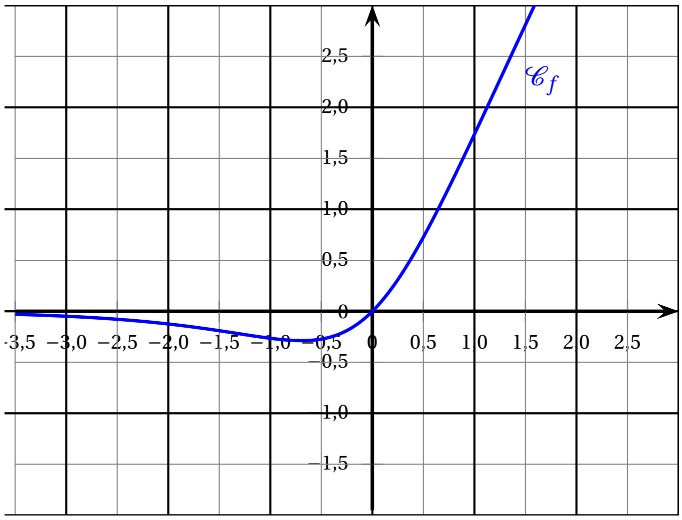
25 Asie J2 - 24 mars 2023

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\,;\ +\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.

   Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

26 Amérique du Nord J1 - 27 mars 2023

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - (2x+1)\mathrm{e}^{x}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x - 3$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. **a.** On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.
   b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.
3. **a.** Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

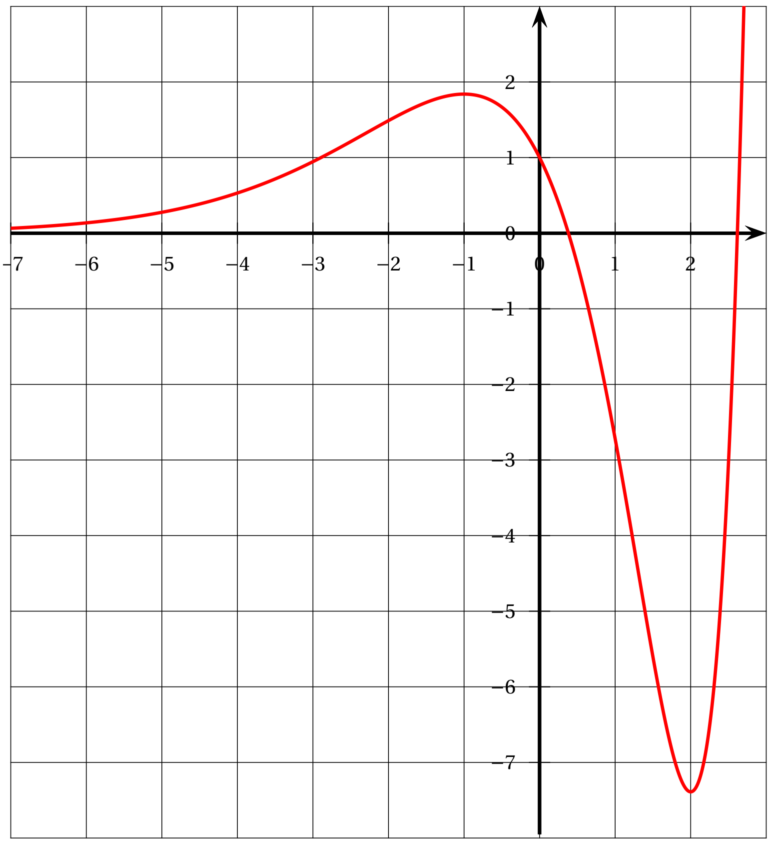
1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{x} g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

27 Amérique du Nord J2 - 28 mars 2023

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^{x}$.

5. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1~;~2]$, on a $f(x) \leqslant x+6$.

28 Nouvelle-Calédonie J2 - 29 août 2023

EXERCICE 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0~;~+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}.$$

démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0~;~+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

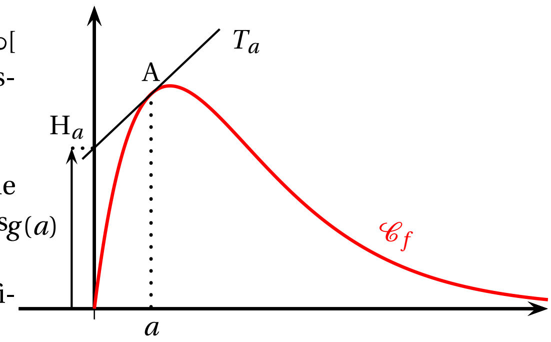
$$f(x) = \frac{367}{1\,000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0~;~+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0~;~+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



   a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = \left[(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}\right]x + a^2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

   b. En déduire l'expression de $g(a)$.

   c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

29 Polynésie - 7 sept 2023

EXERCICE 2 6 points **Thème : fonctions**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}.$$

   b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   c. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
   d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

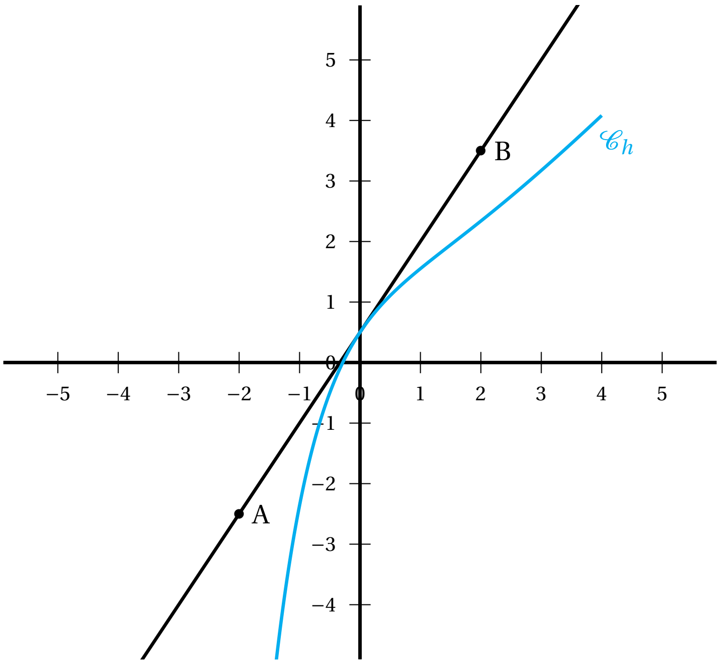
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b) e^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2 ; -2,5)$ et $(2 ; 3,5)$.



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.
2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

valider ou non la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

30 Amérique du Sud J2 - 27 sept 2023

Exercice 4 **5 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A

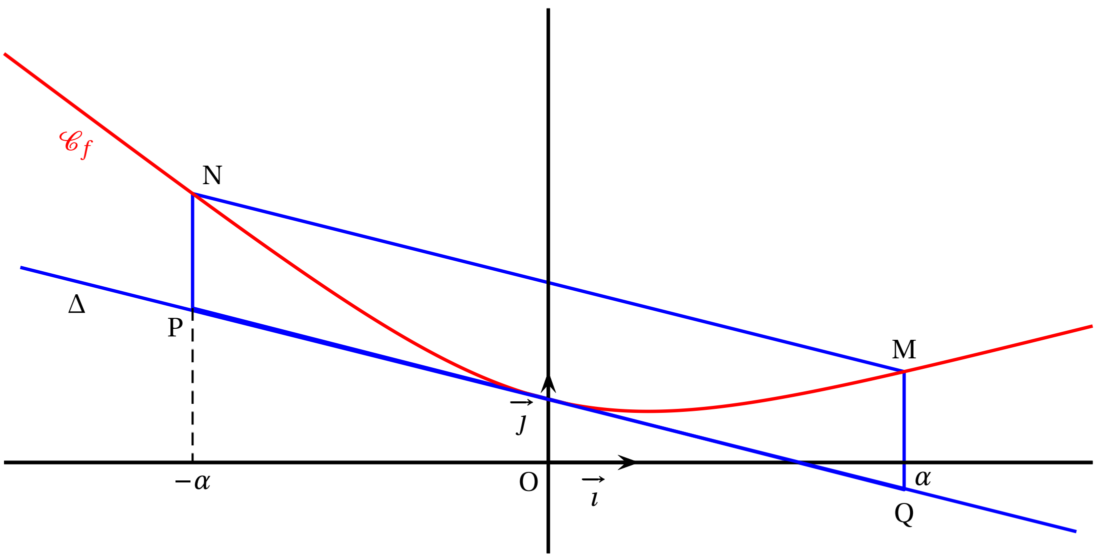
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 3}{4\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;5]$.

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)^2}.$$

On note Δ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. a. Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   b. En déduire que la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,\alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2. a. Montrer que $f(-\alpha) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$.
   b. Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

31 Amérique du Nord J1 - 21 mai 2024

EXERCICE 4 **6 points**

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n = 0
4      I = 2
5      ...
6          n = n+1
7          I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8      return n
```

32 Centres étrangers – Sujet 1 – 5 juin 2024

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u ... 0.0001 :
        n = n+1
        u = ...
    return (u, n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

EXERCICE 3 **5 points**

On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).
   On considère l'équation différentielle

   $$(E) : \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\,\mathrm{e}^{\,x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right]\,\mathrm{d}x.$$

33 Centres étrangers – Sujet 2 – 6 juin 2024

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\,\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^2}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$\mathrm{e}^{x} \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

34 Centres étrangers (Suède) – 7 juin 2024

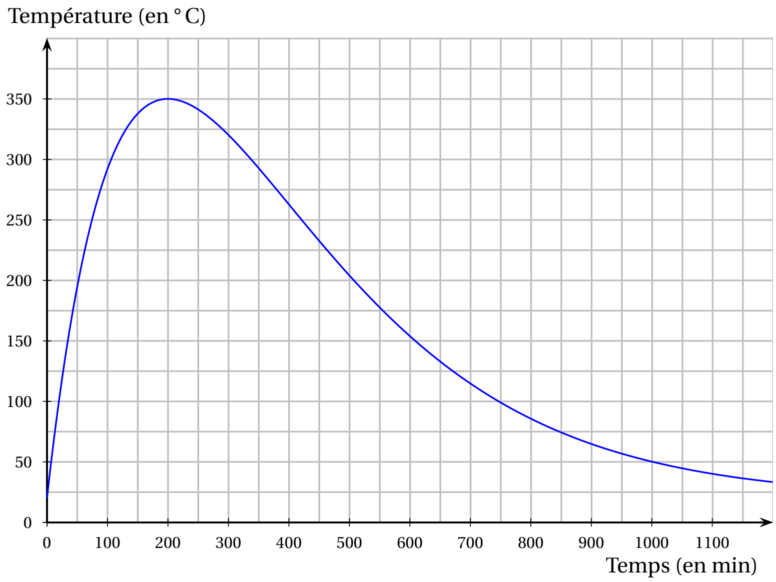
Exercice 3 — 7 points

Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque *A*.
On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.
3. On note f la fonction représentée sur le graphique.
   Estimer la valeur de $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = 10t\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 20.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad g'(t) = (-0,1t + 10)\,\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0~;~+\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 3 : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0~;~600]$ par la fonction g.
L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 °C.
- Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300 °C pendant plus de 5 heures.

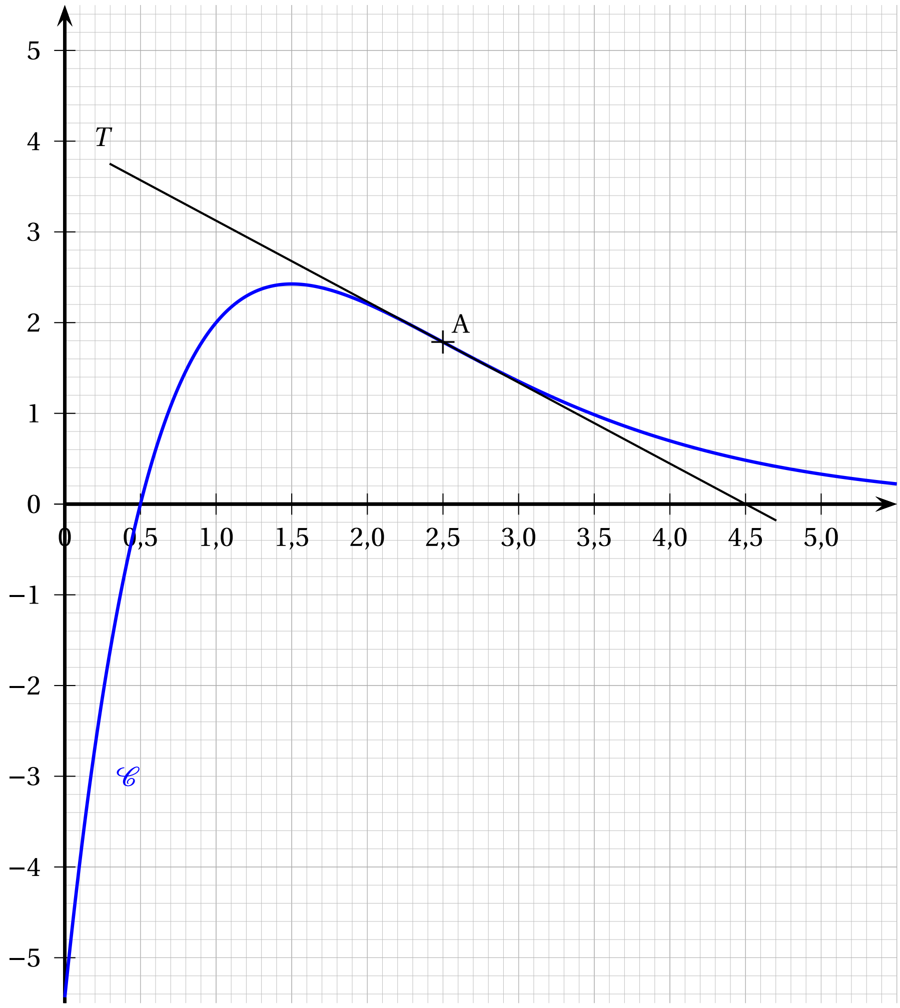
Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

35 Asie – Sujet 1 – 10 juin 2024

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

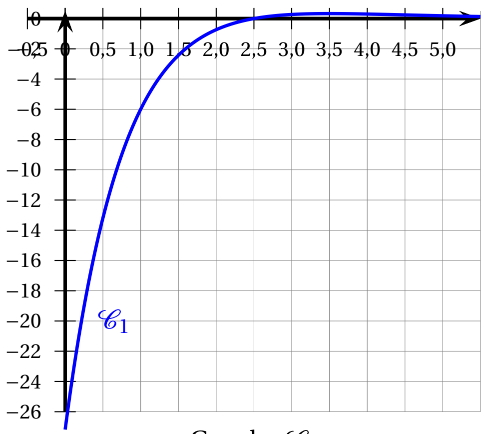
On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



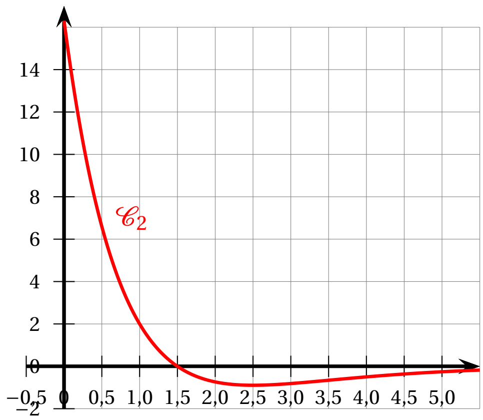
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.

   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.

   Ce choix sera justifié.

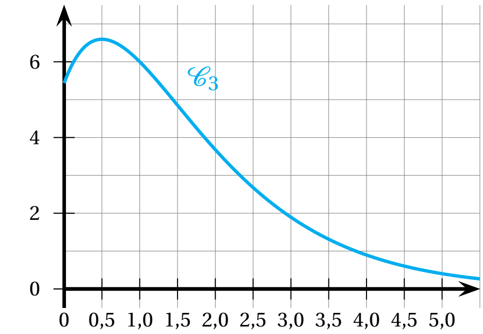


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\,;\,+\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, est définie par

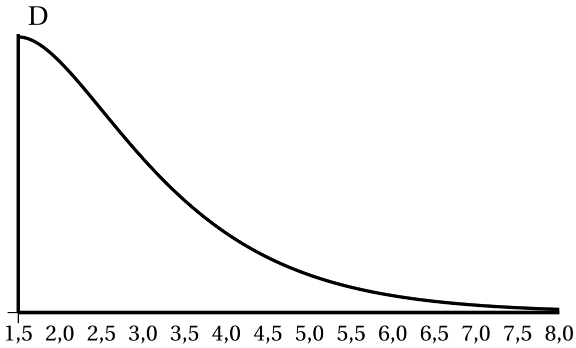
$$f(x) = (4x - 2)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f
   - **a.** Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.
   - **b.** Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   - **c.** Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.
2. On considère une fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.
   - **a.** Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** On admet que $F(x) = (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
     En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 8\right]$.
L'unité de longueur est le mètre.



a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de $0,8\ \text{m}^2$, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette uvre.

36 Polynésie – Sujet 1 – 19 juin 2024

Exercice 2 **5 points**

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210 °C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E): \quad y' + 0,02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

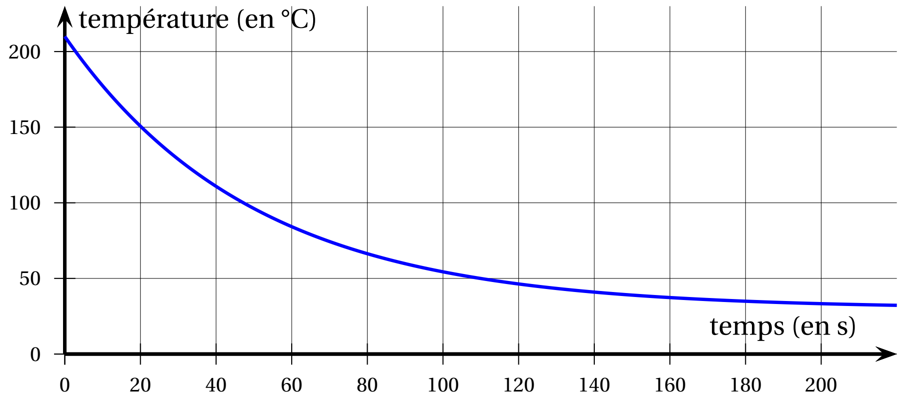
Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0,02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\to}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

2. La température de l'atelier est de 30 °C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30 °C lorsque t tend vers l'infini.
   Démontrer que $m = 0,6$.
3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50°C.
   a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

37 Métropole Antilles-Guyane – 11 septembre 2024

Exercice 2 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (**Figure 2**).

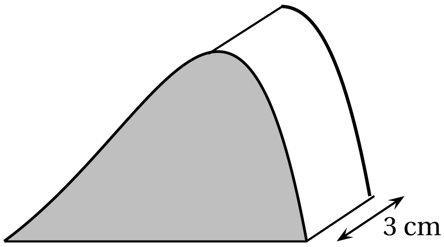


Figure 1

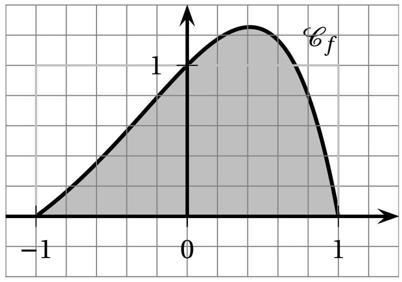


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x}.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

   b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

   où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).
   En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à $0,1$ cm^3 près, est égal à $4,4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01 ; +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01 ; +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

   b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

   c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01 ; +\infty[$.

   Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

   d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2 ; +\infty[$.

   Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

   b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01 ; 1,2[$.

   On donne $\alpha \approx 0,757$.

   En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

38 Métropole Antilles-Guyane – 12 septembre 2024

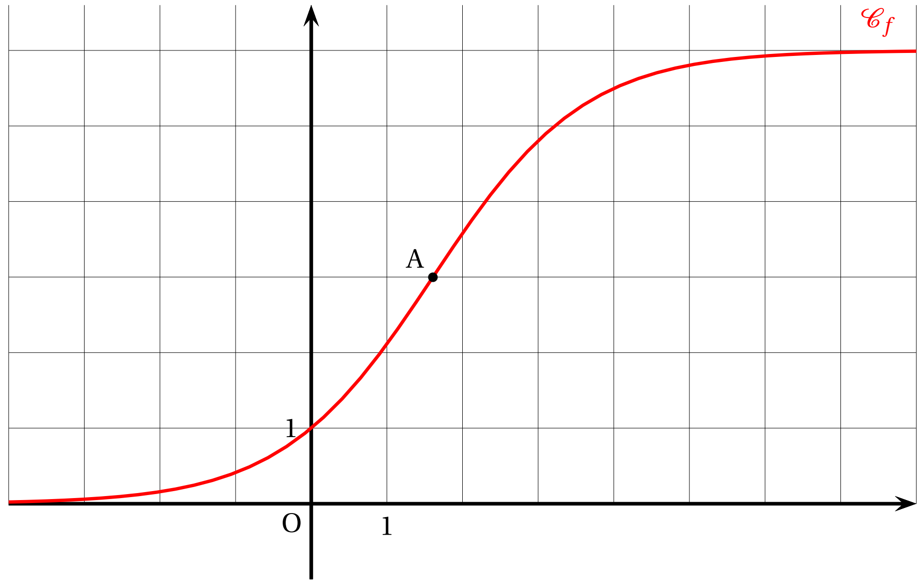
Exercice 3 — 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;\ 3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
3. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2}.$$

   b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :
   - f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
   - pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}\left(5\,\mathrm{e}^{-x}-1\right)}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

   b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ \ln 5]$, on a : $f(x) \geqslant \frac{5}{6}x+1$.
5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln\left(\mathrm{e}^{x}+5\right)$, où k est une constante réelle.

a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.

3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

b. Pour tout réel positif m, on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

39 Amérique du Sud – Sujet 1 – 21 novembre 2024

Exercice 1 — 5 points

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
   a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14\,;\,15]$.
   b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

   c. Quel est l'objectif de la fonction solution_equation dans le contexte de la question ?

40 Amérique du Sud – Sujet 2 – 22 novembre 2024

Exercice 3 — 5 points

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

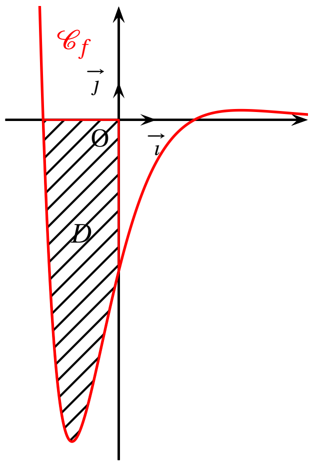
1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.



41 Amérique du Nord – Sujet 1 – 21 mai 2025

EXERCICE 4 **5 points**

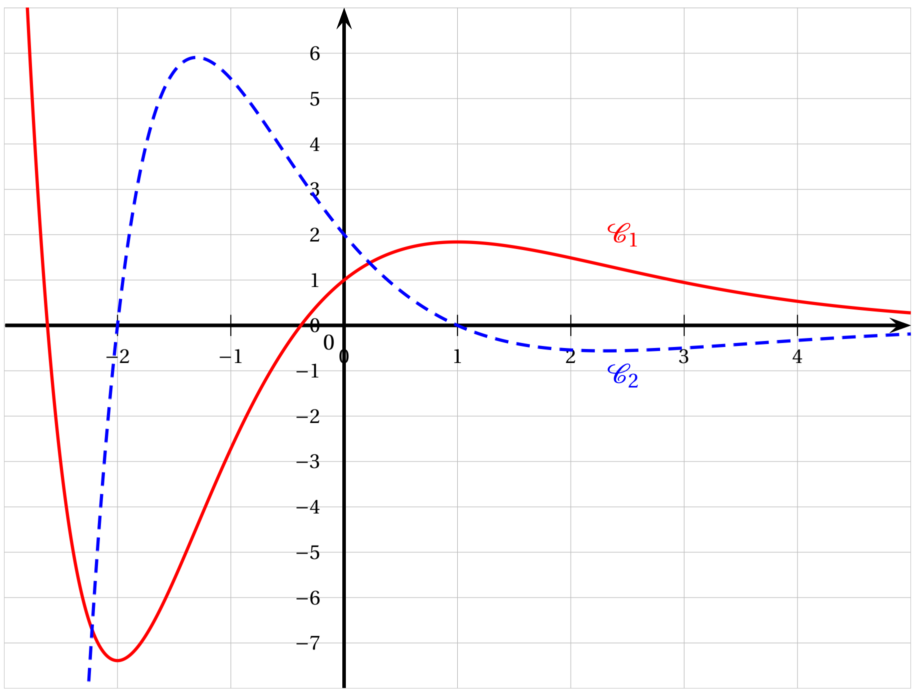
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.
On précise également que :

— La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

— La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y = (2x + 3)\,\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).

   Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right) \mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

   On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}$.

   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2 - 5x - 7\right) \mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

   Soit α un nombre réel positif.

   Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

42 Amérique du Nord – Sujet 2 – 22 mai 2025

EXERCICE 4 **5 points**

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x}[\sin(x) + \cos(x)].$$

   b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{x}\sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

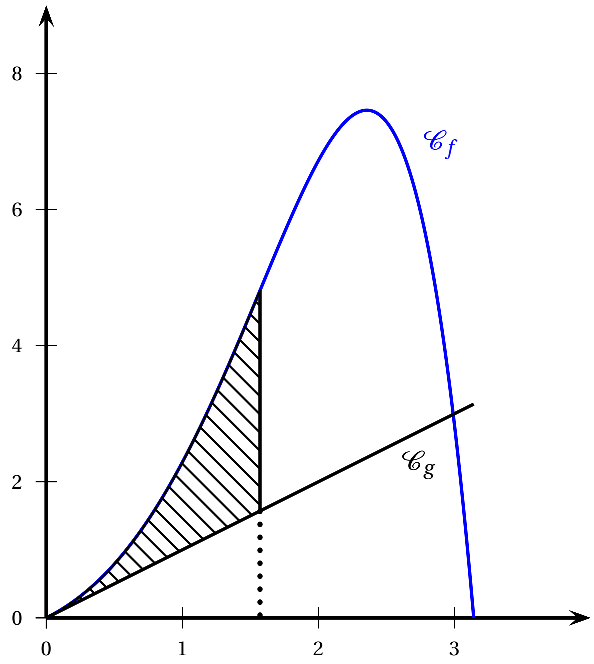
$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

   Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.


8
6
4
2
0
0
1
2
3
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$

43 Amérique du Nord – Sujet secours – 22 mai 2025

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2. **a.** Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.
   b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

44 Asie – Sujet 1 – 11 juin 2025

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   a. Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$
2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Calculer I.
   b. Interpréter graphiquement le résultat.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :
   $$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$
   a. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

45 Asie – Sujet 2 – 12 juin 2025

EXERCICE 4 **5 points**

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.

La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.

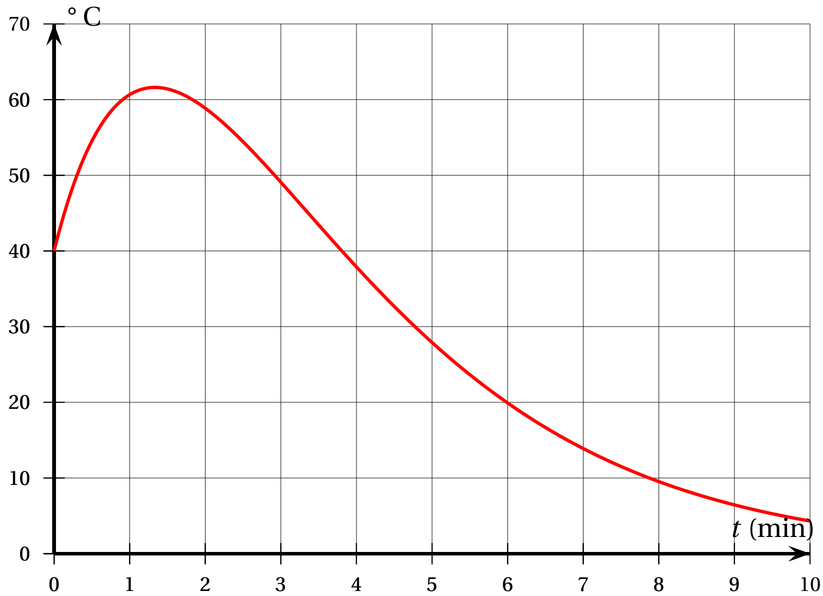
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0\ ;\ 10]$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.

On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.

On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at+b)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.
3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60\,\mathrm{e}^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$f(t) = (60t+40)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t) = (40-30t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.

2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 0]$.

   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.

   b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$.

   c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

   b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.moyenne

46 Centres étrangers – Sujet 1 – 12 juin 2025

EXERCICE 4 **4 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.
À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.
On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.
On a donc $p(0) = 30$.
On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 0,48y = \dfrac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).
   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a :
   $$p(t) = \frac{120}{1 + K\,\mathrm{e}^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$
3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

47 Centres étrangers – Sujet 2 – 13 juin 2025

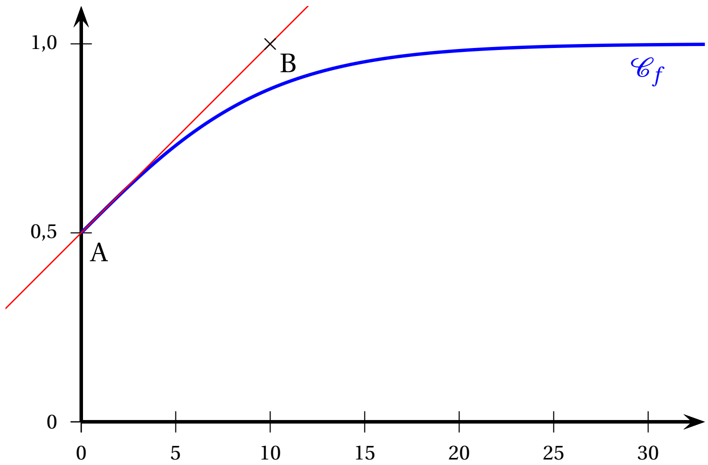
EXERCICE 2 **6 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1).
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 1$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b.
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2x}}$$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel a par deux nombres entiers consécutifs.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40}\int_0^{40} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}\,\mathrm{d}t.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

48 Polynésie – Sujet 1 – 17 juin 2025

Exercice 3 **5 points**

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

1. **a.** On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

2. Justifier par le calcul que le point $\mathrm{A}\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0\,;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_{10}$ et $\mathscr{C}_{100}$.
   a. Donner une interprétation graphique de I_n.
   b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Calculer I_0.
3. **a.** Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6. **a.** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante e.

```
def mystere(n):
  I = 1 - 1/e
  L = [I]
  for i in range(n):
      I = (i + 1)*I - 1/e
      L.append(I)
 return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?

49 Métropole – Sujet 2 – 18 juin 2025

Exercice 4 **6 points**

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.
On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t, à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On a ainsi $d(0) = 0$.
Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition. On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_d$ de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_d$ au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à $\mathscr{C}_d$ en $+\infty$.

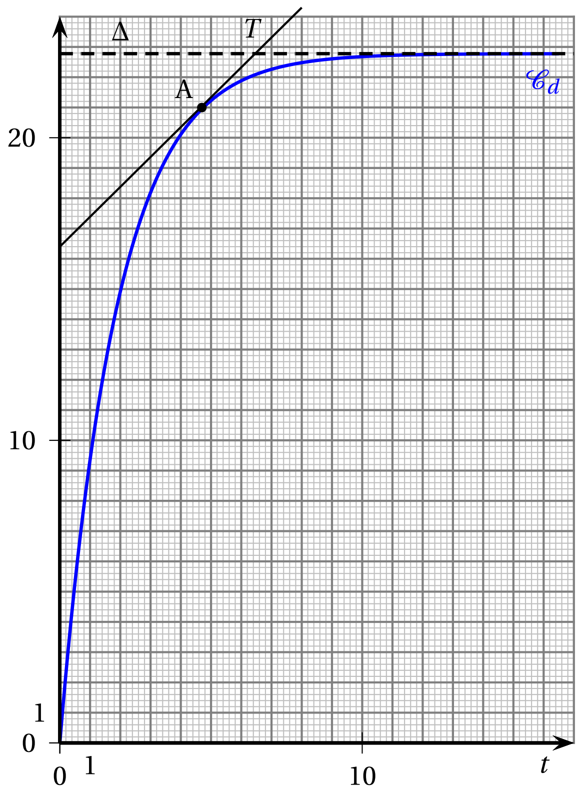


Fig.2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.
D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?

3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde $\left(\text{m.s}^{-1}\right)$, en fonction de t, par une fonction v définie sur $[0~;~+\infty[$.
On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 0,6y = \text{e}^{-0,6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.
On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1}, c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. **a.** On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + 0,6y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0~;~+\infty[$.

b. Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = t\,\text{e}^{-0,6t}$.
Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0~;~+\infty[$.

d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t)\,\text{e}^{-0,6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0~;~+\infty[$.

a. Montrer que pour tout réel $t \in [0~;~+\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)\,\text{e}^{-0,6t}$.

b. En admettant que :

$$v(t) = 12\,\text{e}^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{\text{e}^{0,6t}},$$

déterminer la limite de v en $+\infty$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α, dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.
Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$v(t) = (12 + t)\,\mathrm{e}^{-0,6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.

Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

50 Polynésie – 2 septembre 2025

EXERCICE 2 **(5 points)**

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.
Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.
Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.
Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y - 0,5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y(1 - 0,00125y)$$

On note f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.
Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \dfrac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$	$f(x) = \dfrac{800}{1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}}$
2	$f'(x) :=$ Dérivée $(f(x))$	$f'(x) = \dfrac{600\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^2}$
3	$f''(x) :=$ Dérivée $(f'(x))$	$f''(x) = \dfrac{30\,\mathrm{e}^{-0,05x}}{\left(1 + 15\,\mathrm{e}^{-0,05x}\right)^3}\left(15\,\mathrm{e}^{-0,05x} - 1\right)$
4	Résoudre $(15\,\mathrm{e}^{-0,05x} - 1 \geqslant 0)$	$x \leqslant 20\ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,05f(x)(1 - 0,00125f(x))$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f, estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.

4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C.

b. La direction de la réserve affirme :

« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ». La direction a-t-elle raison ? Justifier.

51 Asie – 5 septembre 2025

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$.

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\,\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

52 Métropole/Amérique du Nord – Sujet 1 – 9 septembre 2025

Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 0,4y = \mathrm{e}^{-0,4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t.
On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = t\,\mathrm{e}^{-0,4t}$.
   Vérifier que u est solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.
   Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.
   a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

   On admettra que la réciproque est vraie.

   b. Résoudre l'équation différentielle (H).
   c. En déduire les solutions de (E).
   d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.
La glycémie en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{L}^{-1}$, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}.$$

1. **a.** Montrer que, pour tout $t \in [0\,;\,6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0\,;6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.
   a. Démontrer que sur l'intervalle $[0\,;6]$ l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution que l'on notera α.
   b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie ?
   On exprimera ce temps à la minute près.
3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{L}^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

   $$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = -23,75\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75.$$

   b. Calculer la glycémie moyenne en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{L}^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.
   c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

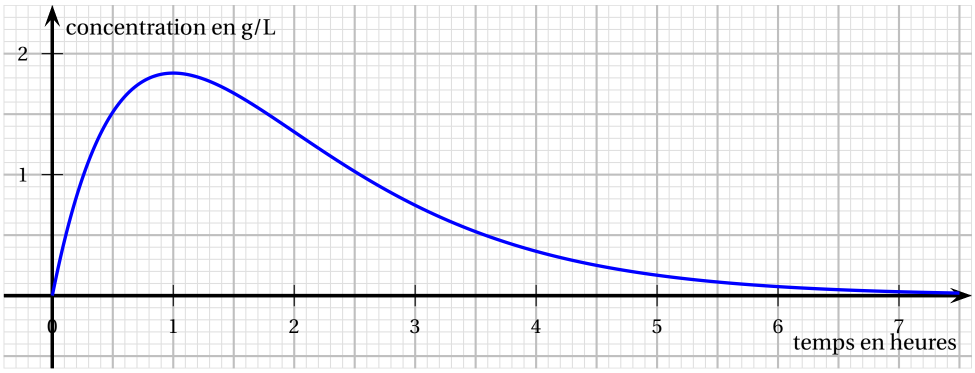
53 Amérique du Sud – Sujet 1 – 13 novembre 2025

Exercice 3 — 6 points

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.

On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f. Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geqslant 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l' intervalle $[0\,;\,8]$.

Partie B : détermination de la fonction *f*

On considère l'équation différentielle

$$(E): \qquad y' + y = 5\,\mathrm{e}^{-t},$$

d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur lintervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $u(t) = at\,\mathrm{e}^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
   Déterminer l'expression de la fonction f.

Partie C : étude de la fonction *f*

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer quil existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.
   On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2.
4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
   Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament ?

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par :

$$T_m = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.
Calculer cette concentration moyenne.
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.

54 Amérique du Sud – Sujet 2 – 14 novembre 2025

Exercice 4 6 points

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30\ ;\ -29\ ;\ -28\ ;\ \ldots -1\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ 28\ ;\ 29\ ;\ 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c.

1. Combien de couples $(a\ ;\ c)$ différents peut-on ainsi obtenir ?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2+2x+c=0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac<1$.
3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\overline{M}$ comporte 1 740 issues.
4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E):\quad y'+10y=\left(30x^2+22x-8\right)\mathrm{e}^{-5x+1}\quad \text{avec}\quad x\in\mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'+10y=0$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(6x^2+2x-2)\,\mathrm{e}^{-5x+1}.$$

   On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Justifier que f est une solution particulière de (E).
3. Donner l'expression de toutes les solutions de (E).

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la partie B question 2.
On rappelle que, pour tout réel x, $f(x)=\left(6x^2+2x-2\right)\mathrm{e}^{-5x+1}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.
   Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$
2. En utilisant la partie A, montrer que $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
3. En utilisant les parties A et B, montrer que $\mathscr{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.
4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x)=1$.

6. Pour tout réel m strictement supérieur à $0,2$, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)\mathrm{e}^{-5x+1}$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$?

Interpréter graphiquement ce résultat.

55 Nouvelle-Calédonie – Sujet 1 – 20 novembre 2025

EXERCICE 3 **6 points**

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur lintervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et on note f_n' sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0\ ;\ 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On admet que $u_1 = \mathrm{e} - 2$.

1. **a.** Justifier que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$$

.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. **a.** À laide dune intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
  u = ...
  for n in range (1, ...):
      u = ...
  return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite(n)` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

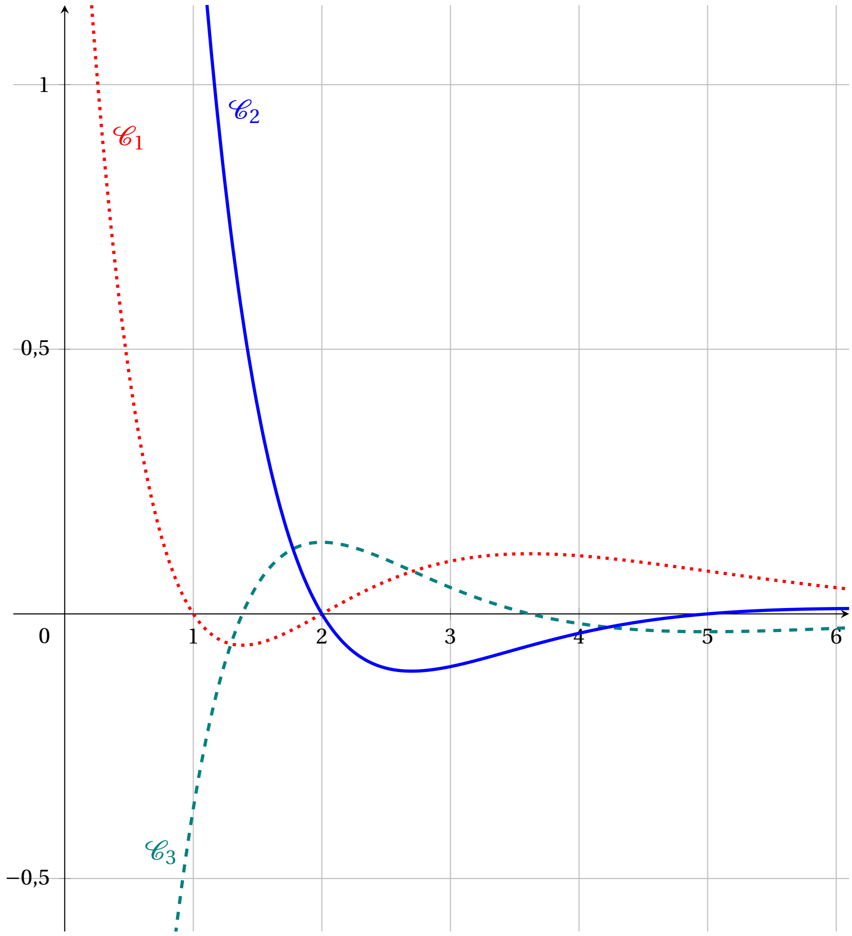
$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

56 Centres Étrangers – Jour 2 – 11 juin 2026

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$: une fonction f, sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.



Associer chacune des fonctions f, f' et f'' à sa courbe représentative. *Aucune justification n'est attendue.*

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $I = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie D

On considère un réel a.
On note (T_a) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

1. Démontrer que le point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées a pour ordonnée

$$\left(a^3 - 4a^2 + 2a + 2\right)\mathrm{e}^{-a}$$

2. Déterminer le nombre de tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère.
   Le candidat explicitera les étapes de la démarche utilisée.