Recueil d'exercices du Baccalauréat sur les Équations différentielles

Session 2021 ....page 2

Session 2022 ....hors programme

Session 2023 ....hors programme

Session 2024 ....page 8

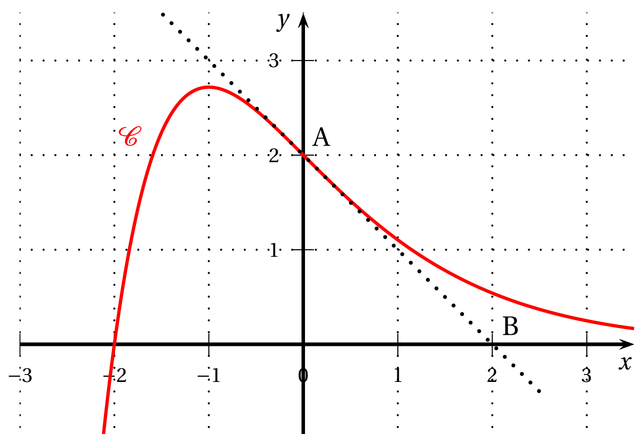
Session 2025 ....page 13

EXERCICE 1 - Polynésie jour 1 (2 juin 2021)

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.

EXERCICE 2 - Asie Jour 1 (7 juin 2021)

Principaux domaines abordés
– Étude de fonction, fonction exponentielle
– Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. **a.** Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.

   b. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

   c. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1 - y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.

Exercice 3 - Métropole Jour 1 (7 juin 2021)

Principaux domaines abordés :
Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^{x}$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.

On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

Exercice 4 - Centres Etrangers jour 1 (9 juin 2021) Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout réel x :

   $$g'(x) = \frac{-2}{3}e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle

   $$(E) : \qquad 3y' + y = 0.$$

   Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point M$(0\,;2)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x}$$

   et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

   a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M$(0\,;2)$ admet une équation de la forme :

   $$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

   b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.

   Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.

2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

Exercice 5 - Centres Etrangers jour 2 (10 juin 2021)

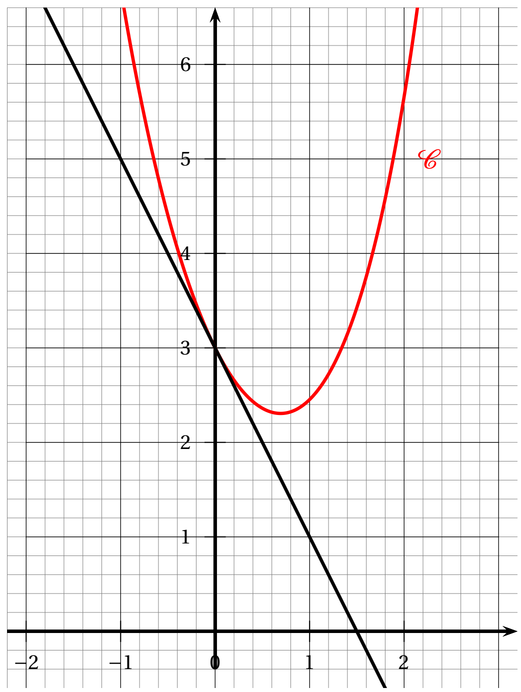
Équation différentielle

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.

   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 2\mathrm{e}^{x} - x - 1$$

   a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g(x) = \mathrm{e}^{x} - x + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

   est solution de l'équation (E).

   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E). est solution de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3. On admettra que, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{x} - 2 > 0$.

   Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 6 - Centres Étrangers Jour 1 (5 juin 2024)

On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

   On considère l'équation différentielle

   $$(E) : \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.

   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».

5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7. Calculer :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

Exercice 7 - Métropole jour 2 (20 juin 2024)

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 $m^3 = 1\,000$ L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $mg \cdot L^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\,mg \cdot L^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01\,mg \cdot L^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70\,mg \cdot L^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3\,mg \cdot L^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $mg \cdot L^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
   On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3.$$

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.
Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\text{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 8 - Amérique du Sud Jour 1 (21 novembre 2024)

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

   a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14\,;\,15]$.

   b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```python
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

   c. Quel est l'objectif de la fonction solution_equation dans le contexte de la question?

Exercice 9 - Polynésie jour 1 (19 juin 2024)

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210 °C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E) : \quad y' + 0{,}02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

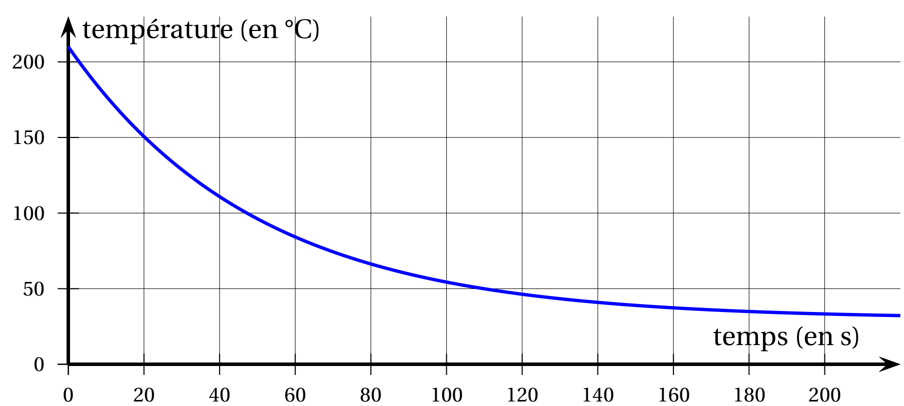
Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0{,}02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

2. La température de l'atelier est de 30 °C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30 °C lorsque t tend vers l'infini.
   Démontrer que $m = 0{,}6$.
3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50°C.
   a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

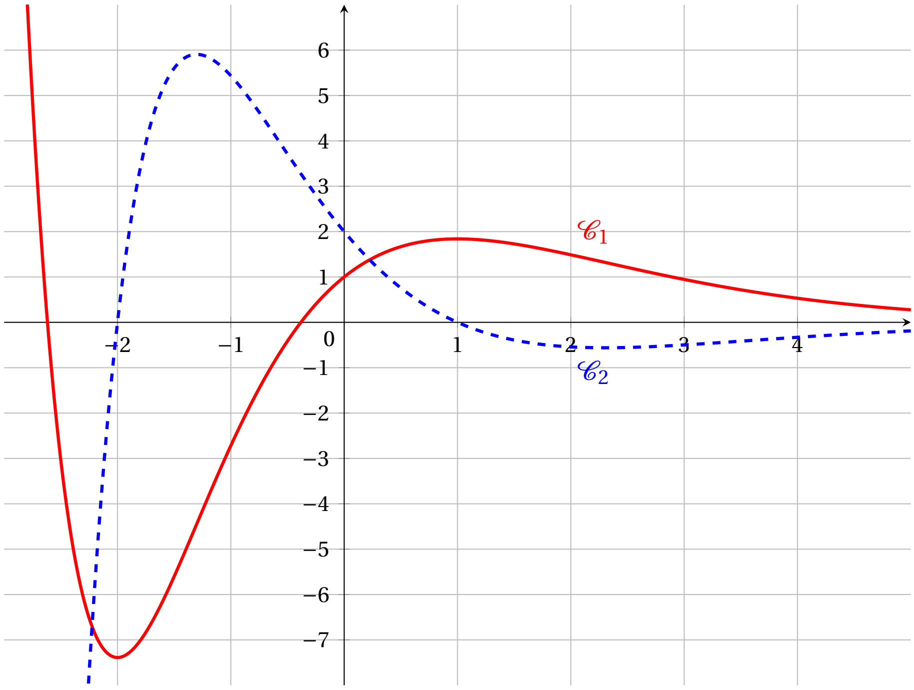
EXERCICE 10 : AMÉRIQUE DU NORD J1 (21 MAI 2025)

La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g.
On précise également que :

- La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,1)$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).

   Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

   On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \left(-x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2 - 5x - 7\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

   Soit α un nombre réel positif.

   Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.