Exercice 1

Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des automobilistes au moment de franchir un feu tricolore.

Sur un cycle de deux minutes la probabilité que:

- le feu soit « rouge » est 0,35 ;
- le feu soit « orange » est de 0,05 ;
- le feu soit « vert » est de 0,6.

Par ailleurs, les observateurs notent que les comportements diffèrent selon la couleur du feu :

- lorsque le feu est rouge, 10 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
- lorsque le feu est orange, 86 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
- lorsque le feu est vert, tous les conducteurs continuent de rouler.

On s'intéresse à un conducteur pris au hasard, on observe son comportement selon la couleur du feu et on note :

- R l'événement : « le feu est rouge » ;
- O l'événement : « le feu est orange » ;
- V l'événement : « le feu est vert » ;
- C l'événement : « le conducteur continue de rouler ».

Partie A

1) Modéliser cette situation par un arbre pondéré complet, c'est-à-dire en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

2) Montrer que la probabilité que le conducteur continue de rouler au feu est 0,678.

3) Un conducteur a continué de rouler au feu. Quelle est la probabilité que le feu soit vert ? Arrondir au millième.

4) On considère qu'un automobiliste est en infraction lorsque le feu est rouge et il continue de rouler ou lorsque le feu est orange et il continue de rouler.

Démontrer que la probabilité qu'un automobiliste soit en infraction est de 0,078.

Partie B

On observe 10 véhicules franchissant le feu. On admet que cet échantillon est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs et indépendants. On nomme X la variable aléatoire qui compte le nombre d'automobilistes en infraction. Dans les questions suivantes, on donnera les valeurs arrondies au millième si nécessaire.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

2) Déterminer la probabilité qu'exactement deux automobilistes soit en infraction.

3) Calculer la probabilité qu'au moins un des automobilistes soit en infraction.

4) Parmi ces dix automobilistes, combien, en moyenne, sont en infraction ?

Partie C

Déterminer le nombre minimum de véhicules à observer pour que la probabilité de relever au moins un automobiliste en infraction soit supérieure ou égale à 0,99. On expliquera les différentes étapes du raisonnement.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis à 10^{-4} près. D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17% de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32% sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans (Source: TNS-Sofres).

Partie A:

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans utilisant les transports en commun.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11% de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas les transports en commun est 0,0556 (au millième près).
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95% de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

<u>Exercice 3</u> [Re-Ca-Ra-Co) (/9 pts)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies, au besoin, à 10^{-4} près.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A-Commercialisation du test de dépistage Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- Si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test)
- Si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants d'une compétition d'athlétisme et on note:

- D l'évènement : « l'athlète est dopé » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,1.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.

2) Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,1025.

3) On appelle « faux-positif » l'évènement « un athlète présentant un test positif n'est pas dopé ».

Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité d'un faux-positif est inférieure à 5%.

Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier la réponse.

Partie B - Contrôle sanitaire lors d'une compétition

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,1025.

4) Dans cette question uniquement, les organisateurs choisissent au hasard 10 athlètes de la compétition pour procéder au test anti-dopage. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les cinq athlètes contrôlés.

a. Donner, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'aucun des dix athlètes ne présente un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des dix athlètes présentent un test positif.

d. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

5) Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,9 ? Expliquer le raisonnement.

Dans cette question, toute trace pertinente de recherche sera valorisée.

Exercice 4

Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, s'il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1) Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare, Paul rate son train une fois sur 10.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduit au travail. On note :

- V l'événement : « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare »
- R l'événement : « Paul rate son train »

a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$

c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2) On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.

On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{2}{3}$.

b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo ? On arrondira la réponse à l'entier.

3) Déterminer le nombre minimum de jours où Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail pour que la probabilité que Paul prenne son vélo au moins un jour soit supérieure ou égale à 0,99.

4) Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en min)	10	11	12	13	14	16	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,16	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.