

**Primitives et équations différentielles****Exercice 1 :**

Déterminez une primitive de la fonction dans les cas suivants

a) $f(x) = 6x^2 + \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2}$

b) $f(x) = e^x(4e^x + 1)^2$

c) $f(x) = \frac{-1+2\ln(x)}{x}$

Exercice 2

Compléter directement sur cette feuille et sans justifier le tableau suivant en calculant à chaque ligne toutes les primitives de la fonction sur l'intervalle donné.

	Fonction f	Intervalle	Toutes les primitives F de f
1	$f(x) = 5x^2 - 2 + \frac{3}{\sqrt{x-4}}$	$]4; +\infty[$	$F(x) =$
2	$f(x) = x^2 e^{-x^3}$	\mathbb{R}	$F(x) =$
3	$f(x) = \frac{3-6x}{x-x^2}$	$]0; 1[$	$F(x) =$
4	$f(x) = e^{2x}(e^{2x} + 1)^2$	\mathbb{R}	$F(x) =$
5	$f(x) = \frac{1}{(7x+1)^3}$	$]-\frac{1}{7}; +\infty[$	$F(x) =$

Exercice 3 : Les 6 questions sont indépendantes

1. Dans chaque cas, déterminer toutes les primitives F de f sur I .

a) $f: x \mapsto x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ et $I = \mathbb{R}$

b) $f: x \mapsto \frac{x^2}{x^3+5}$ et $I =]0; +\infty[$

c) $f: x \mapsto e^{1-3x}$ et $I = \mathbb{R}$

d) $f: x \mapsto (6x^2 + 2)(x^3 + x + 1)^2$ et $I = \mathbb{R}$

**Exercice 4**

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f ci-dessous définies sur \mathbb{R} .

a) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{6x+3}{x^2+x+6}$

c) $f(x) = \frac{5x}{(x^2+3)^2}$

Exercice 5

1. Dans chacun des deux cas ci-dessous, déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle :

a) $y' - 3y = 0$

b) $y' = \frac{1}{2}y + 1$

c) Vérifier que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x + 3$ est solution de l'équation différentielle :

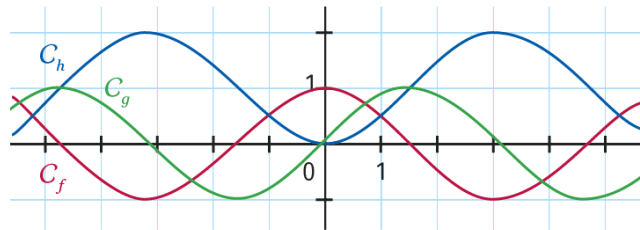
$(E): y' = -y + x^2 - x$

d) En déduire la forme générale des solutions de (E) .

2. Déterminer la primitive F de f sur \mathbb{R} vérifiant la condition $F(2) = 2$.

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

3. Parmi les fonctions g et h représentées ci-contre, quelle est celle qui correspond à une primitive de la fonction f ? Justifie ta réponse.



4. Vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle I est solution de l'équation différentielle :

$$y' = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}; \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \quad \text{et } I = \mathbb{R}$$

5. Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

a) $y' - \frac{1}{2}y = 0$

b) $2y' - y = 2$

6. Soit (E) l'équation différentielle $y' - 3y = e^{3x}$

a) Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^{3x}$ est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E_0) : $y' = 3y$

c) Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0) .

d) En déduire la forme générale des solutions de (E) .



Exercice 6

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
2. Déterminer la solution de l'équation (E) vérifiant $f(0) = 225$.

Exercice 7

La fabrication de l'un des constituants du ciment nécessite des fours à très haute température qui libèrent une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).

Dans une cimenterie, la fabrication de ce constituant s'effectue de 7h30 à 20h dans une pièce de 900000 dm^3 . A 20h, en fin de journée de fabrication, le volume de CO_2 dans la pièce est de 5400 dm^3 . Pour diminuer le taux de CO_2 pendant la nuit, une colonne de ventilation a été installée dans la pièce. Soit V la fonction qui donne le volume de CO_2 , exprimé en dm^3 , en fonction du temps t écoulé après 20h, exprimé en minutes.

t varie dans l'intervalle $[0; 690]$ (il y a 690 minutes entre 20h et 7h30).

On admet que V est solution de l'équation différentielle (E): $y' + 0,01y = 4,5$.

- 1) Vérifier que, pour tout réel $t \in [0; 690]$, $V(t) = 4950e^{-0,01t} + 450$.
- 2) Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans la pièce à 21 h ?
- 3) Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 deviendra inférieur à 900 dm^3 . (On arrondira le résultat à l'heure près).

Exercice 8

Une colonie de 2 000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps en heure ($t \geq 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle suivante.

$$(E): N'(t) = 3N(t) - 0,005 (N(t))^2$$

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction g par : $g(t) = \frac{1}{N(t)}$

Déterminer $g'(t)$.

2. Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de (E'): $y' = -3y + 0,005$.
3. Résoudre (E') puis résoudre (E).
4. a) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.
b) Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.



Exercice 9

On considère l'équation différentielle (E): $xy' - y = x^2e^{2x}$, y étant une fonction de la variable x . On cherche à déterminer toutes les solutions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}$.

Calculer $g'(x)$ et en déduire que g est une solution de (E).

2. Soit f une solution quelconque de l'équation différentielle (E) définie sur $]0; +\infty[$.

a. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Montrer que pour tout nombre réel x , $h'(x) = e^{2x}$.

b. En déduire les expressions possibles de la fonction f en fonction de x .

Exercice 10

La température de refroidissement d'un objet est une fonction f du temps t . On note $f(t)$ la température de l'objet à l'instant t , où :

- t est exprimé en heures;
- $f(t)$ est exprimée en degrés Celsius.
- f est définie sur $[0; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle (E): $y' + \frac{1}{2}y = 10$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E) en recherchant d'abord une solution particulière constante.

2) Sachant que la température initiale de l'objet est 220°C , déduire que pour tout $t \in [0; +\infty[$
 $f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$.

3) Quelle sera la température de l'objet au bout de 30 minutes ? Arrondir au degré près.

4) a. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

b. Interpréter les deux réponses à la question 4a.

5) Déterminer le moment où la température de l'objet est de 50°C . On donnera une valeur approchée à la minute près.

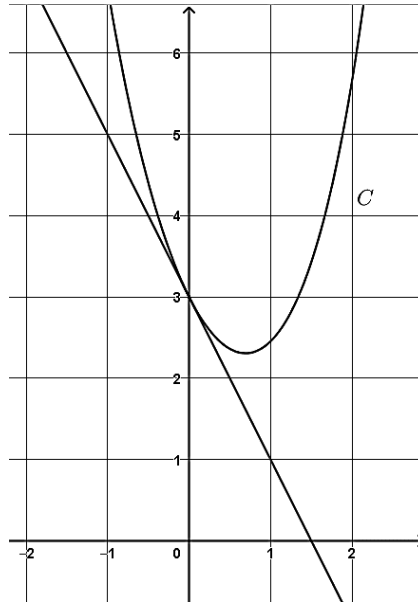


Exercice 11

Partie A - Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + ax + be^{-x}$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie. Dans le plan muni d'un repère d'origine O , on a représenté ci-dessous la courbe C_f représentant la fonction f , et la tangente T à la courbe C_f , au point d'abscisse 0.



- 1) Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
- 2) En utilisant l'expression de la fonction f , exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b .
- 3) On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.
 - b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a .
 - c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a , puis en déduire l'expression de $f(x)$.
- 4) On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = 2e^x - x - 1$$

- a. Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$ est solution de l'équation (E).
- b. Résoudre l'équation différentielle (EH) : $y' + y = 0$.
- c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur \mathbb{R}

- 5) Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 6) Vérifier que pour tout réel x , on a :
$$e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$$
- 7) En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x .
- 8) Étudier les variations de la fonction g sur \mathbb{R} .