

SUITES NUMERIQUES

Arithmétiques :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + r \\ u_n &= u_0 + n \times r \\ u_n &= u_1 + (n - 1) \times r\end{aligned}$$

$$S = \frac{1er + dernier\ terme}{2} \times nombre\ de\ termes$$

Géométriques :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n \times q \\ u_n &= u_0 \times q^n \\ u_n &= u_1 \times q^{n-1}\end{aligned}$$

$$S = 1er\ terme \times \frac{1 - q^{nbr\ de\ termes}}{1 - q}$$

Sens de Variation :

Signe de $u_{n+1} - u_n$ dans 90% des cas ou variation de la fonction associée si $u_n = f(n)$.

Démonstration par récurrence :

Définir la propriété P(n) i.e. la relation à démontrer.

Initialisation : Vérifier que la relation est correcte au rang initiale (remplacer n par 0 ou 1, calculer et comparer les valeurs).

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un entier k. On montre que P(k+1) est vraie.

Deux cas souvent rencontrés :

On construit le calcul de u_{k+1} autour de u_k quand u_k n'est présent qu'une fois dans la formule de récurrence de la suite.

Quand u_k est présent plusieurs fois dans la formule de la suite, on étudie les variations de la fonction f associée à la suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Elle est généralement croissante. On applique la fonction sur l'inégalité à démontrer pour passer du rang k au suivant. Les fonctions croissantes conservent l'ordre.

Conclusion : La propriété est vraie au rang initial et est héréditaire donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n (si le rang initial est n=0, sinon « pour tout entier naturel n > 0 ».)

Limite d'une suite :

➤ **Par opérations :** somme, produit, quotient. F.I quand $+\infty - \infty$ ou $0 \times \infty$ ou $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

➤ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$ **Propriété à citer obligatoirement.**

➤ **Par comparaison :** Si $v_n \leq u_n \leq w_n$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ alors par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

➤ **Théorème des gendarmes (encadrement) :** Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

➤ **Théorème de convergence des suites monotones :**

Si (u_n) est croissante et majorée par M alors (u_n) converge vers un réel $\ell \leq M$.

Si (u_n) est décroissante et minorée par m alors (u_n) converge vers un réel $\ell \geq m$.

➤ **Théorème du point fixe :** Si la suite (u_n) converge vers ℓ et si la fonction f est continue en ℓ , alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. La limite ℓ est la solution de l'équation $f(x) = x$.

Python :

for i in range (0, n) ou for i in range (1, n+1) : pour calculer un terme de rang n (la boucle fonctionne n fois).

while u > k : pour trouver un rang n à partir duquel $u_n \leq k$

n = n + 1 : incrémente le rang pour connaître le rang du dernier terme calculé

u = ... : on utilise la formule de récurrence dans la boucle for ou while . Le premier terme et le rang initial ont été spécifiés juste avant la boucle.

while abs(u - ℓ) > 10**(-2) : On cherche la limite ℓ de la suite à 10^{-2} près.