PROBABILITÉS CONDITIONNELLES – VARIABLES ALÉATOIRES

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

$P(A \cup B) = p(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\qquad$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\qquad$ $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$

Si A et B sont incompatibles $P(A \cap B) = 0$

Si A et B sont indépendants $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Probabilités totales : A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. B est un événement de cet univers. Alors $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

LOI BINOMIALE

On répète n fois une expérience à deux issues de manière identique et indépendante. La probabilité du succès est p. Alors la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $(n\,;p)$.

Formule de Bernoulli : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Au moins un : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

Espérance : $E(X) = np$ $\qquad$ Variance : $V(X) = np(1-p)$

VARIABLES ALÉATOIRES

Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$

Variance de 2 v.a. indépendantes $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ *et* $V(aX) = a^2 V(X)$

Somme $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $\qquad$ Espérance : $E(S_n) = nE(X)$ $\qquad$ Variance : $V(S_n) = nV(X)$

Moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$ $\qquad$ $E(M_n) = E(X)$ $\qquad$ $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$

CONCENTRATION – LOI DES GRANDS NOMBRES

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $p(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$ i.e. $P(X \notin]\mu - \delta; \mu + \delta[\,) \leq \frac{V}{\delta^2}$

Si $\delta = k\sigma$ alors $p(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ et $p(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

- Inégalité de concentration : $P(|M - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$

- Loi des grands nombres : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M - \mu| \geq \delta) = 0$ car $0 \leq P(|M - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V}{n\delta^2} = 0$ (théorème des gendarmes)