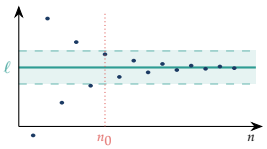
LIMITES DE SUITES

— TERMINALE SPÉ MATHS —

1. LIMITE FINIE

Définition

(u_n) **converge** vers le réel ℓ si **tout intervalle ouvert** contenant ℓ contient **tous les termes** u_n **à partir d'un certain rang**. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

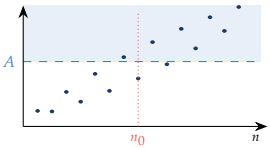


Unicité : si elle existe, la limite est unique.
Référence : $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n^k}$ tendent vers 0.

2. LIMITE INFINIE

Définition

(u_n) a pour limite $+\infty$ si **tout intervalle** $]A\,;+\infty[$ contient **tous les termes** u_n **à partir d'un certain rang**. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



$-\infty$ **:** même définition avec les intervalles $]-\infty\,;B[$. **Divergente :** non convergente (limite infinie *ou* pas de limite, ex. $(-1)^n$). **Référence :** n, n^2, $\sqrt{n}$, n^k tendent vers $+\infty$.

3. LIMITES PAR OPÉRATIONS ET FORMES INDÉTERMINÉES

$+\infty - \infty$ $\quad 0\times\infty$ $\quad \frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\longrightarrow$ on ne peut pas conclure directement : il faut **transformer l'écriture** (méthodes ci-dessous).

4. FACTORISER PAR LE TERME DOMINANT

Quand ? Polynôme ou quotient de polynômes : FI $\infty-\infty$ ou ∞/∞.
Comment ? On met en facteur le **monôme de plus haut degré** (au numérateur *et* au dénominateur).

Ex. : $v_n = \dfrac{3n^2+n}{2n^2-7} = \dfrac{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2-\frac{7}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{7}{n^2}} \longrightarrow \dfrac{3}{2}$

Même idée avec des puissances : factoriser par la plus grande, ex. $3^n - 2^n = 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

5. MULTIPLIER PAR LE CONJUGUÉ

Quand ? Différence de racines carrées : FI $\infty-\infty$.
Comment ? On multiplie et on divise par l'**expression conjuguée** ($\sqrt{A}+\sqrt{B}$ pour $\sqrt{A}-\sqrt{B}$) et on utilise $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Ex. : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow 0$

6. THÉORÈMES DE COMPARAISON

Quand ? Présence de $(-1)^n$, $\cos n$, $\sin n\ldots$ ou suite qu'on sait **minorer** / **majorer**.

Comparaison (limites infinies)

Si $u_n \geq v_n$ et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
Si $u_n \leq w_n$ et $\lim w_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.
(inégalités vraies à partir d'un certain rang)

Théorème des gendarmes (limite finie)

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.

Ex. : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ et $\pm\frac{1}{n} \to 0$, donc $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

7. LIMITE DE q^n

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
pas de limite	$\lim q^n = 0$	$\lim q^n = 1$	$\lim q^n = +\infty$

Démonstration ($q>1$) : inégalité de Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$ (par récurrence) puis comparaison.

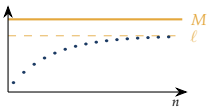
Somme $(-1<q<1)$: $1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$

Ex. : $\dfrac{2^n+5}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n \longrightarrow 0$ car $\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \in]0\,;1[$.

8. CONVERGENCE MONOTONE

Théorème

Toute suite **croissante et majorée** converge.
Toute suite **décroissante et minorée** converge.



Si (u_n) est croissante et majorée par M, alors $\ell \leq M$.
Une suite **croissante non majorée** tend vers $+\infty$ *(décroissante non minorée :* $-\infty$*)*.

Attention : le théorème prouve l'**existence** de la limite, **pas sa valeur** ; le majorant n'est pas forcément la limite. Variations et majoration se prouvent souvent **par récurrence**.

9. THÉORÈME DU POINT FIXE

Théorème

Soit $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) **converge** vers ℓ et si f est **continue** en ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $\boxed{f(x)=x}$.

Méthode : 1) prouver la convergence ; 2) résoudre $f(\ell)=\ell$; 3) choisir la solution compatible avec les bornes.

Ex. : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Par récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$: croissante, majorée, donc convergente. $f(x) = \sqrt{2+x}$ est continue : $\ell = \sqrt{2+\ell} \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0$ $\iff \ell = 2$ ou $\ell = -1$. Or $\ell \geq 0$, donc $\ell = 2$.

À RETENIR

- Toujours tenter les opérations avant de chercher une méthode.
- FI : terme dominant, conjugué, ou comparaison selon la forme.
- Citer le théorème utilisé (gendarmes, q^n, monotone…).
- Convergence d'abord, puis $f(\ell)=\ell$ pour la valeur.

pierre-carree.fr