FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

— TERMINALE SPÉ MATHS —

1. FONCTION EXPONENTIELLE

$$\exp'(x) = \mathrm{e}^x \qquad (\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$$

Primitive : $u'\,\mathrm{e}^u \longrightarrow \mathrm{e}^u$

Définie sur $\mathbb{R}$, **strictement croissante**.

Signe : $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.

Ni paire ni impaire, non périodique.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
exp	0	↗	1	↗	$+\infty$

2. LOGARITHME NÉPÉRIEN

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

Primitive : $\dfrac{u'}{u} \longrightarrow \ln u$; $\ln x \longrightarrow x\ln x - x$

Définie sur $]0\,;+\infty[$, **strictement croissante**.

Signe : $\ln x < 0$ sur $]0\,;1[$, $\ln x > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

Ni paire ni impaire, non périodique.

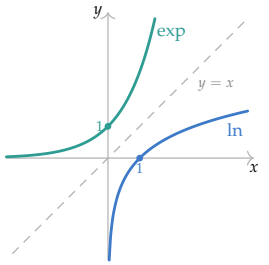
x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$		$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous réels a et b (strictement positifs pour ln) et tout entier n :

Exponentielle	Logarithme	Exponentielle	Logarithme
$\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$	$\ln 1 = 0,\ \ln \mathrm{e} = 1$	$\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$	$\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$	$\ln(a^n) = n\ln a$
$\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$	$\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$	$\sqrt{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{a/2}$	$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$	$\ln a = \ln b \iff a = b$	$\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$	$\ln a < \ln b \iff a < b$

Fonctions réciproques : $\mathrm{e}^{\ln a} = a \qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x \qquad \ln a = b \iff a = \mathrm{e}^b$



Courbes symétriques par rapport à la droite $y = x$.

4. LIMITES ET CROISSANCES COMPARÉES

Limites aux bornes

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$$

Asymptotes : $y = 0$ en $-\infty$ pour exp ; $x = 0$ pour ln. cos et sin n'ont ***pas de limite*** *en $\pm\infty$.*

Croissances comparées ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x^n\,\mathrm{e}^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+}x^n\ln x = 0$$

En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x, qui l'emporte elle-même sur le logarithme.

Limites « taux d'accroissement »

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Nombres dérivés en 0 de $\exp$, $\sin$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

5. SINUS ET COSINUS : CALCULS

Dérivées

$$\sin'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\sin x$$
$$(\sin u)' = u'\cos u \qquad (\cos u)' = -u'\sin u$$

Primitives ($a \neq 0$)

$$\cos x \longrightarrow \sin x \qquad \sin x \longrightarrow -\cos x$$
$$\cos(ax+b) \longrightarrow \tfrac{1}{a}\sin(ax+b)$$
$$\sin(ax+b) \longrightarrow -\tfrac{1}{a}\cos(ax+b)$$

Propriétés algébriques

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$

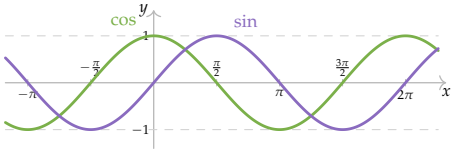
6. SINUS ET COSINUS : ÉTUDE

Parité : cos paire, sin impaire

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

Périodicité (2π)

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$



$\mathcal{C}_{\cos}$ symétrique par rapport à (Oy), $\mathcal{C}_{\sin}$ par rapport à O : on étudie sur $[0\,;\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
sin	0	↗	1	↘	0
$-\sin x$	0	$-$		$-$	0
cos	1	↘	0	↘	-1

Signe sur $[-\pi\,;\pi]$

$\cos x \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin x \geq 0$ sur $[0\,;\pi]$

À RETENIR

- $\mathrm{e}^x > 0$ toujours ; $\ln x$ n'existe que pour $x > 0$.
- Croissances comparées : e^x, puis x^n, puis $\ln x$.
- Composées : $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(\cos u)' = -u'\sin u$.
- cos paire, sin impaire, toutes deux 2π-périodiques.

pierre-carree.fr