COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

— TERMINALE – SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES —

1. PRINCIPE ADDITIF

« ou » exclusif : on additionne

Si A et B sont deux ensembles finis **disjoints** ($A \cap B = \varnothing$) :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Si $A_1, \ldots, A_p$ partitionnent E : $\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \cdots + \text{Card}(A_p)$.

Cas général : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Exemple

Un menu propose 3 entrées chaudes et 4 entrées froides. On choisit *une* entrée : $3 + 4 = 7$ choix possibles.

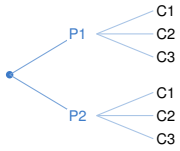
2. PRINCIPE MULTIPLICATIF

« et » successifs : on multiplie

Le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples $(a\,;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Si un choix se fait en p étapes successives offrant $n_1, n_2, \ldots, n_p$ possibilités, il y a $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ issues.



Exemple

2 pantalons et 3 chemises : $2 \times 3 = 6$ tenues possibles.

3. k-UPLETS

Ordre compté, répétitions autorisées

Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \mathbb{N}^*$. Un **k-uplet** de E est une liste ordonnée $(x_1\,;\ldots\,;x_k)$ d'éléments de E, non nécessairement distincts.

$$\text{Card}(E^k) = n^k$$

Chaque position offre n choix : principe multiplicatif appliqué k fois.

Exemple

Code à 4 chiffres (de 0 à 9) : $10^4 = 10\,000$ codes.

4. ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

Arrangement

k-uplet d'éléments **distincts** de E ($k \leqslant n$) : ordre compté, sans répétition.

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Permutation

Arrangement des n éléments de E ($k = n$) : tous utilisés, dans un ordre.

$$\mathcal{A}_n^n = n!$$
$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \qquad 0! = 1$$

Exemples

Podium (3 places) parmi 8 coureurs : $\mathcal{A}_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
Ordres de passage de 5 élèves : $5! = 120$.

5. COMBINAISONS

Ordre sans importance, sans répétition

Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments ($0 \leqslant k \leqslant n$). Leur nombre se note $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») :

$$\binom{n}{k} = \frac{\mathcal{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Chaque partie à k éléments correspond à $k!$ arrangements (ses $k!$ ordres possibles).

Exemple

Mains de 5 cartes dans un jeu de 32 : $\binom{32}{5} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!} = 201\,376$.

Propriétés

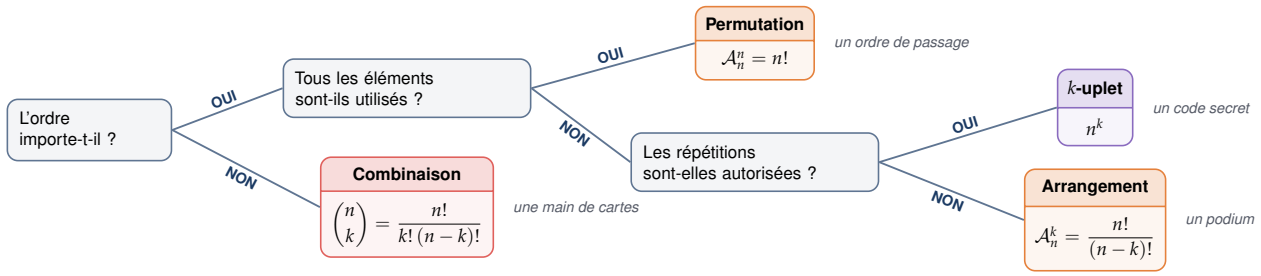
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Pascal ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Le nombre total de parties de E est 2^n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

6. ARBRE DE CHOIX : QUELLE FORMULE UTILISER ?



À RETENIR

- « ou » entre cas disjoints : on additionne ; « et » entre étapes successives : on multiplie.
- Se demander : l'ordre compte-t-il ? les répétitions sont-elles possibles ?
- Calculer n^k, $\mathcal{A}_n^k$, $n!$ et $\binom{n}{k}$, à la main ou à la calculatrice.
- Utiliser la symétrie et la relation de Pascal sur les $\binom{n}{k}$.
- Dénombrer les 2^n parties d'un ensemble à n éléments.

pierre-carree.fr