pierre-carree.fr

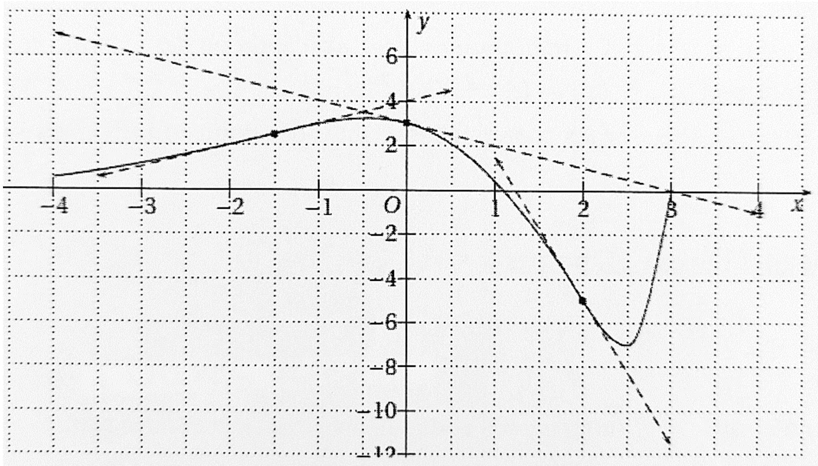
Convexité

<u>Exercice 1 : QCM</u>

Ce QCM comporte 4 questions. Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse choisie sur votre copie. (On ne demande pas de justifier)

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.

Sur la figure ci-dessous, la courbe C représente une fonction deux fois dérivable sur [-4 ; 3] ainsi que ses tangentes en certains points.



1. f est convexe sur l'intervalle : ☐ [-1 ; 1] ☐ [-4 ; 0] ☐ [2 ; 3]

2. La courbe C admet : ☐ 1 point d'inflexion ☐ 2 points d'inflexion ☐ 3 points d'inflexion

3. Sur [0 ; 2] la fonction dérivée f' : ☐ est croissante ☐ est décroissante ☐ change de variation

4. Sur [2 ; 3] la fonction dérivée f' : ☐ est négative ☐ est positive ☐ change de signe

<u>Exercice 2</u>

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^3-x^2-3}{x^2+3}$

1) Calculer $'(x)$. Montrer que $g'(x) = \frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}$

2) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_g au point d'abscisse 1.

3) On admet que pour tout réel x, $g''(x) = \frac{6x(3-x^2)}{(x^2+3)^3}$.

Déterminer que quel(s) intervalle(s) la fonction g est convexe et sur quel(s) intervalle(s) la fonction g est concave.

<u>Exercice 3</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{-2x}$.

1) Pour tout réel x calculer $f'(x)$.

2) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. (Indiquer la valeur exacte du ou des extremums de f).

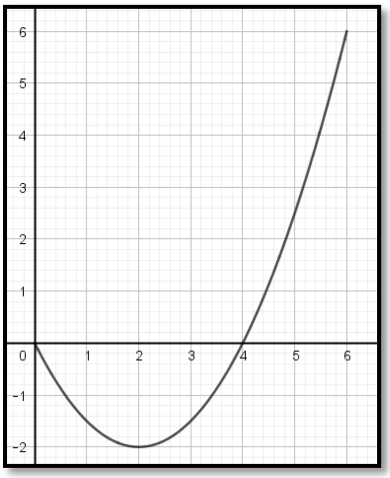
3) On admet que pour tout réel x, $f''(x) = (4x - 8)e^{-2x}$.

Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Préciser les coordonnées exactes des points d'inflexions éventuels de la courbe C_f.

Exercice 4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) f est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;6]$.
On donne la représentation graphique de sa fonction dérivée f' ci-contre.



- a. f est convexe sur [0 ; 6].
- b. f est concave sur [0 ; 4] et convexe sur [4 ; 6].
- c. f est convexe sur [0 ; 4] et concave sur [4 ; 6].
- d. f est concave sur [0 ; 2] et convexe sur [2 ; 6].

2) g est la fonction définie sur R par $g(x) = (1 - 2x)^3$.

- a. g est convexe sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$
- b. g est concave sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$
- c. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de g.
- d. La courbe de g n'admet pas de point d'inflexion.

3) h est la fonction définie sur R par$h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

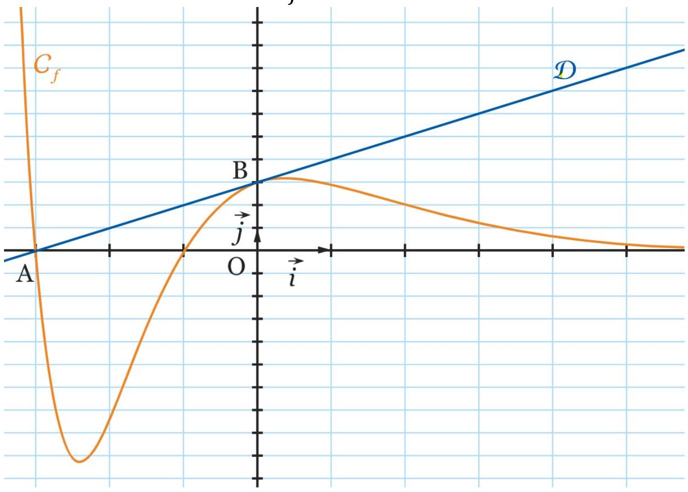
- a. $h'(2) = -\frac{1}{2}$
- b. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 2 est 1.
- c. La tangente à la courbe de h au point d'abscisse 2 est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$.
- d. L'équation réduite de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 2 est $y = \frac{1}{2}x + 1$.

4) k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = xe^{-x^2}$.
La fonction dérivée de k est la fonction k' définie sur $\mathbb{R}$ par :

- a. $k'(x) = -2xe^{-x^2}$.
- b. $k'(x) = (1 - 2x)e^{-x^2}$.
- c. $k'(x) = (2 - x^2)e^{-x^2}$.
- d. $k'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$.

Exercice 5

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
D est la tangente à C_f au point d'abscisse 0. D et C_f sont sécantes en A et en B.



1) Conjecturer la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les limites de la fonction f en +∞ et en -∞.
3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$.
4) Les questions précédentes conduisent aux variations de f sur $\mathbb{R}$ suivantes. Il n'est pas demandé de les justifier.

x	-∞		$-\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$		+∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	+∞	↘		↗		↘	0

Déterminer par le calcul l'équation réduite de la tangente D à la courbe de f au point d'abscisse 0.

5) Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f''(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.
6) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et préciser les abscisses des points d'inflexion de C_f.
7) Déduire de l'étude précédente que pour tout $x \in \left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$, $(x^2 + 4x + 3)e^{-x} \leq x + 3$.