

Probabilités (III) — Concentration, loi des grands nombres

TERMINALE

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = \mu$, de variance $V(X) = V$ et d'écart-type $\sigma(X) = \sigma$. Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2} \quad \text{et} \quad P(|X - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}.$$

En prenant $\delta = k\sigma$ (avec $k > 0$) :

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Méthode

Exemple : Soit X telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$. Majorons $P(|X - 10| \geq 5)$:

$$P(|X - 10| \geq 5) \leq \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

2 Inégalité de concentration

Propriété

Soit un échantillon $(X_1; \dots; X_n)$ de variables indépendantes de même loi, avec $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = V$. On note $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ la variable moyenne. Pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2} \quad \text{et} \quad P(|M_n - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{n\delta^2}.$$

Méthode

Exemple : Pour un échantillon de taille $n = 100$ et de variance $V = 1$, majorons $P(|M_n - \mu| \geq 0,5)$:

$$P(|M_n - \mu| \geq 0,5) \leq \frac{1}{100 \times 0,25} = \frac{1}{25} = 0,04.$$

3 Loi (faible) des grands nombres

Propriété

La **moyenne** M_n d'un échantillon d'une variable aléatoire se rapproche de son espérance μ quand n devient grand : pour tout réel $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0.$$

Méthode

Exemple : L'inégalité de concentration donne $0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V}{n\delta^2} = 0$, donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$.

Méthode

Exemple : **Application.** On lance un grand nombre n de fois un dé équilibré et on note M_n la moyenne des résultats. L'espérance d'un lancer vaut

$$\mu = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

D'après la loi des grands nombres, M_n se stabilise autour de 3,5 lorsque n devient grand.

À retenir

Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$; avec $\delta = k\sigma : \leq \frac{1}{k^2}$.

Concentration : $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$.

Loi des grands nombres : M_n se concentre autour de μ ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$.