

Probabilités (II) — Somme de variables aléatoires

TERMINALE

1 Opérations sur les variables aléatoires

Définition

À partir de deux variables aléatoires X et Y et d'un réel a , on peut définir de nouvelles variables aléatoires, notamment la **somme** $X + Y$ et le **produit par un réel** aX .

2 Linéarité de l'espérance

Propriété

Pour toutes variables aléatoires X et Y et tout réel a :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \qquad E(aX) = a E(X).$$

Plus généralement, $E(aX + b) = a E(X) + b$.

Méthode

Exemple : Si $E(X) = 2$ et $E(Y) = 5$, alors $E(3X + Y) = 3E(X) + E(Y) = 6 + 5 = 11$.

3 Propriété de la variance

Propriété

- Pour tout réel a : $V(aX) = a^2 V(X)$ (et $V(aX + b) = a^2 V(X)$).
- Si X et Y sont **indépendantes** : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Attention : la variance d'une somme n'est la somme des variances que si les variables sont indépendantes.

Méthode

Exemple : Si $V(X) = 4$, alors $V(2X + 1) = 2^2 \times V(X) = 16$.

Si X et Y sont indépendantes avec $V(X) = 3$ et $V(Y) = 5$, alors $V(X + Y) = 8$.

4 Décomposition de la loi binomiale

Propriété

Une variable aléatoire suivant une **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$ peut être décomposée comme **somme de n variables aléatoires indépendantes** suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

On retrouve alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$ par linéarité et additivité.

5 Échantillon

Définition

Un **échantillon** de taille n est une liste $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ de variables aléatoires **indépendantes et de même loi**. On définit :

- la variable **somme** : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$;
- la variable **moyenne** : $M_n = \frac{S_n}{n}$.

Propriété — Caractéristiques d'un échantillon

Si chaque X_i a pour espérance $E(X)$ et variance $V(X)$:

$$E(S_n) = n E(X) \qquad V(S_n) = n V(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}.$$

Méthode

Exemple : Pour $n = 10$ variables indépendantes de même loi, d'espérance $\mu = 2$ et de variance $\sigma^2 = 3$:

$$E(S_n) = 10 \times 2 = 20 \qquad V(S_n) = 10 \times 3 = 30.$$

$$E(M_n) = 2 \qquad V(M_n) = \frac{3}{10} = 0,3.$$

À retenir

Espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, $E(aX + b) = aE(X) + b$ (toujours vraie).

Variance : $V(aX + b) = a^2 V(X)$; $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X, Y indépendantes.

Somme : $E(S_n) = nE(X)$, $V(S_n) = nV(X)$.

Moyenne : $E(M_n) = E(X)$, $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$.