

Calcul intégral

TERMINALE

1 Intégrale et primitive

Propriété — Existence d'une primitive

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie sur $[a; b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f . L'**intégrale** de f entre a et b est :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Méthode

Exemple : Calculer $\int_0^2 2x dx$.

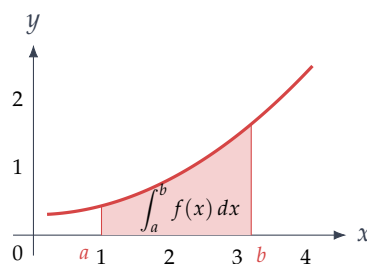
Une primitive de $2x$ est x^2 , donc $\int_0^2 2x dx = [x^2]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4$.

2 Calcul d'aire

Propriété — Aire sous une courbe

Sur $[a; b]$, l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ (en unités d'aire) vaut :

- $\int_a^b f(x) dx$ si $f \geq 0$ sur $[a; b]$;
- $-\int_a^b f(x) dx$ si $f \leq 0$ sur $[a; b]$.



Propriété — Aire entre deux courbes

Si $g \geq f$ sur $[a; b]$, l'aire comprise entre les courbes C_f et C_g vaut :

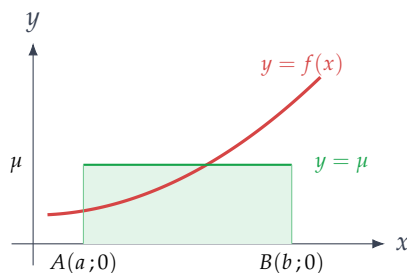
$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

3 Valeur moyenne**Définition**

La **valeur moyenne** d'une fonction f continue sur $[a; b]$ (avec $a \neq b$) est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Géométriquement, le rectangle de base $[a; b]$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous C_f .

**4 Propriétés de l'intégrale****Propriété — Linéarité et relation de Chasles**

Pour f, g continues et α, β réels :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (\text{relation de Chasles})$$

Propriété — Inégalités (positivité)

Si, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt.$$

En particulier, si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

5 Intégration par parties

Propriété

Si u et v sont dérivables, à dérivées continues sur $[a; b]$:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Méthode

Exemple : Calculer $\int_0^1 x e^x dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$:

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e^1 - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

À retenir

Calcul : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ avec $F' = f$.

Aire : $\int_a^b f$ si $f \geq 0$; aire entre courbes $\int_a^b (g - f)$ si $g \geq f$.

Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

Chasles : $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$; **IPP** : $\int u v' = [uv] - \int u' v$.