

# Fonctions cosinus et sinus

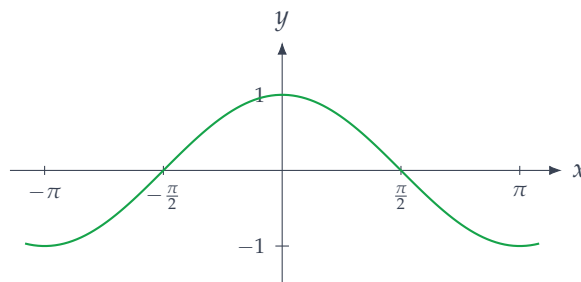
## TERMINALE

### 1 Fonction cosinus

#### Propriété — Périodicité et parité

La fonction cosinus est définie sur  $\mathbb{R}$ .

- Elle est **périodique** de période  $2\pi$  : pour tout réel  $x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ .
- Elle est **paire** : pour tout réel  $x$ ,  $\cos(-x) = \cos(x)$ .



#### Propriété — Dérivée

La fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  :

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

#### Propriété — Résolution d'équation

Soit  $a$  un réel. Pour tout réel  $x$  :

$$\cos(x) = \cos(a) \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

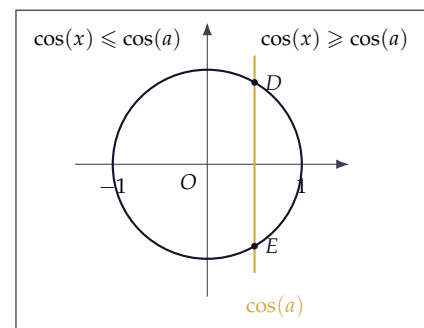
#### Propriété — Résolution d'inéquation

Soit  $a \in [0; \pi]$ . Pour tout réel  $x$  :

$$\cos(x) \leq \cos(a) \iff a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi,$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

Sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisse inférieure à  $\cos(a)$  correspondent à l'arc situé à gauche de la droite verticale  $x = \cos(a)$ .



#### Méthode

Exemple : Résoudre  $\cos(x) = \frac{1}{2}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Comme  $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$  :

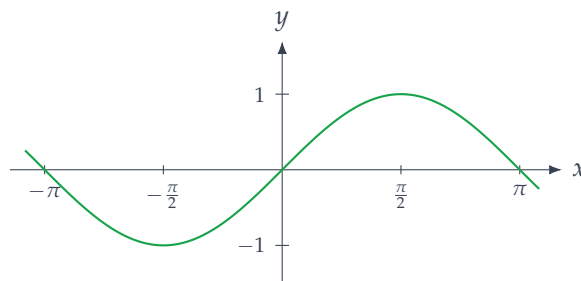
$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 2 Fonction sinus

### Propriété — Périodicité et parité

La fonction sinus est définie sur  $\mathbb{R}$ .

- Elle est **périodique** de période  $2\pi$  : pour tout réel  $x$ ,  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ .
- Elle est **impaire** : pour tout réel  $x$ ,  $\sin(-x) = -\sin(x)$ .



### Propriété — Dérivée

La fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$  :

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

### Propriété — Résolution d'équation

Soit  $a$  un réel. Pour tout réel  $x$  :

$$\sin(x) = \sin(a) \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

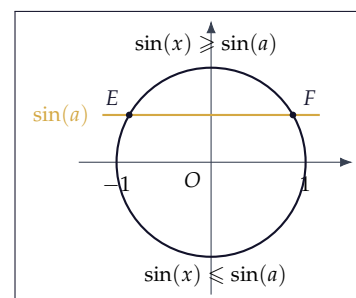
### Propriété — Résolution d'inéquation

Soit  $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Pour tout réel  $x$  :

$$\sin(x) \leq \sin(a) \iff -\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi,$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

Sur le cercle trigonométrique, les points d'ordonnée inférieure à  $\sin(a)$  correspondent à l'arc situé sous la droite horizontale  $y = \sin(a)$ .



**Méthode**

*Exemple :* Résoudre  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Comme  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  :

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**3 Dérivées composées et limite usuelle****Propriété**

Pour une fonction  $u$  dérivable :

$$(\sin(u))' = u' \cos(u) \qquad (\cos(u))' = -u' \sin(u).$$

**Propriété**

Limite usuelle (nombre dérivé de sin en 0) :

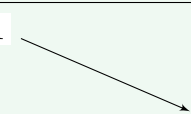
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

**Méthode**

*Exemple :* Étudier les variations de la fonction cosinus sur  $[0; \pi]$ .

On a  $\cos'(x) = -\sin(x)$ , et sur  $[0; \pi]$ ,  $\sin(x) \geq 0$ , donc  $\cos'(x) \leq 0$ .

|            |   |       |
|------------|---|-------|
| $x$        | 0 | $\pi$ |
| $\cos'(x)$ | — |       |
| $\cos(x)$  | 1 | -1    |



La fonction cosinus est décroissante sur  $[0; \pi]$ , de  $\cos(0) = 1$  à  $\cos(\pi) = -1$ .

**À retenir**

**Parité :** cos paire, sin impaire ; **période**  $2\pi$  pour les deux.

**Dérivées :**  $\cos' = -\sin$  et  $\sin' = \cos$ .

**Équations :**  $\cos x = \cos a \Rightarrow x = \pm a + 2k\pi$  ;  $\sin x = \sin a \Rightarrow x = a + 2k\pi$  ou  $x = \pi - a + 2k\pi$ .

**Limite usuelle :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .