

Combinatoire et dénombrement

TERMINALE

1 Définitions

Définition

- **Ensemble** : collection d'objets distincts.
- **Partie** : une partie d'un ensemble est un ensemble dont tous les éléments appartiennent aussi à l'ensemble.
- **Liste ou p -uplet** : collection *ordonnée* d'objets qui peuvent se répéter.
- **Produit cartésien** $E \times F$: ensemble des couples $(x; y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

2 Principes de dénombrement

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments et F un ensemble à p éléments.

- **Principe additif** : si E et F sont disjoints, $E \cup F$ possède $n + p$ éléments.
- **Principe multiplicatif** : $E \times F$ possède np éléments.

Méthode

Exemple : Un menu propose 3 entrées et 4 plats. Le nombre de repas « une entrée et un plat » est $3 \times 4 = 12$ (principe multiplicatif).

3 p -uplets, permutations et arrangements

Propriété

Soit un ensemble à n éléments.

- Nombre de **p -uplets** (listes ordonnées avec répétition possible) : n^p .
- Nombre de **permutations** (rangements ordonnés des n éléments) : $n!$.
- Nombre de **p -uplets d'éléments distincts** (arrangements) : $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Propriété — Factorielles

$$0! = 1 \qquad (n+1)! = (n+1) \times n!$$

Méthode

Exemple : **p -uplets**. Un code de 4 chiffres (de 0 à 9, répétitions permises) : $10^4 = 10\,000$ codes.
Permutations. Ranger 5 livres distincts : $5! = 120$ façons.

Arrangements. Un podium (or, argent, bronze) parmi 8 athlètes : $\frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

4 Combinaisons

Propriété

Le nombre de **parties à p éléments** d'un ensemble à n éléments (choix *sans ordre*) est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}.$$

Le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .

Propriété — Combinaisons remarquables

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Propriété — Relation de Pascal

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Cette relation permet de construire le **triangle de Pascal**.

Méthode

Exemple : Dans une classe de 20 élèves, choisir 2 délégués (sans ordre) :

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{18! \times 2!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190.$$

Méthode

Exemple : Symétrie. Sachant $\binom{7}{2} = 21$, on a directement $\binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = 21$.

À retenir

p -uplets : n^p ; **permutations :** $n!$; **arrangements :** $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Combinaisons : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$; nombre total de parties : 2^n .

Remarquables : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.