

Fonctions (V) — Primitives, équations différentielles

TERMINALE

1

Primitive d’une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
Deux primitives d’une même fonction diffèrent d’une **constante** : elles sont de la forme $F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

2

Déterminer la primitive d’une fonction

Propriété — Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, k désigne un réel quelconque.

Fonction f	Primitive F
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x^n, n \text{ entier } (n \neq -1)$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$

Propriété — Primitives de fonctions composées

u désigne une fonction dérivable sur I (et strictement positive quand une racine ou un logarithme intervient).

Forme de la fonction	Primitive
$u' u^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ et } n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u' e^u$	e^u
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$

Méthode

Exemple : Déterminer une primitive de $f(x) = 2x e^{x^2}$.

On reconnaît la forme $u' e^u$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Une primitive est donc $F(x) = e^{x^2} + k$.

Méthode

Exemple : Déterminer une primitive de $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Une primitive de $3x^2$ est x^3 et une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln |x| = \ln x$ (car $x > 0$). Donc $F(x) = x^3 + \ln x + k$.

3 Résoudre une équation différentielle

Propriété — Équation $y' = f$

Résoudre $y' = f$ revient à **trouver une primitive** de f . Les solutions sont les primitives de f sur I .

Propriété — Équation $y' = ay$

Les solutions de $y' = ay$ (avec a réel) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto K e^{ax}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Propriété — Équation $y' = ay + b$

Avec $a \neq 0$:

- une solution particulière constante est $x \mapsto -\frac{b}{a}$;
- les solutions générales sont de la forme

$$x \mapsto -\frac{b}{a} + K e^{ax}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Propriété — Équation $y' = ay + \varphi$

Avec φ une fonction donnée :

- une solution particulière est de la forme $x \mapsto P(x)$;
- les solutions générales sont de la forme

$$x \mapsto P(x) + K e^{ax}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Exemple : Résoudre $y' = 2y + 6$.

Ici $a = 2$ et $b = 6$, donc $-\frac{b}{a} = -3$. Les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto -3 + K e^{2x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

À retenir

Primitives : $F' = f$; deux primitives diffèrent d'une constante k .

Formes composées : reconnaître $u' u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u' e^u$, $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$y' = ay$: solutions $K e^{ax}$.

$y' = ay + b$: solutions $-\frac{b}{a} + K e^{ax}$ (solution particulière constante $-\frac{b}{a}$).