

Espace (III) — Paramétriques et équations cartésiennes

TERMINALE

1 Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Une droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$. On obtient une **représentation paramétrique** de d :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Exemple : La droite passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = 3 + 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Exemple : Appartenance d'un point. Le point $B(5; 0; 11)$ appartient-il à la droite ci-dessus ?

On résout $1 + 2k = 5$, soit $k = 2$. On vérifie alors : $y = 2 - 2 = 0$ et $z = 3 + 4 \times 2 = 11$. Les trois égalités sont satisfaites pour $k = 2$, donc $B \in d$.

2 Équation cartésienne d'un plan

Propriété — Équation cartésienne

Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0,$$

où d se détermine à l'aide des coordonnées d'un point connu du plan.

Propriété

Réciproquement, si un plan a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

Méthode

Exemple : Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ passant par $A(1;0;3)$.

Le plan a une équation de la forme $2x + y - z + d = 0$. Comme $A \in \mathcal{P}$:

$$2 \times 1 + 0 - 3 + d = 0 \iff -1 + d = 0 \iff d = 1.$$

Une équation cartésienne est $2x + y - z + 1 = 0$.

Méthode

Exemple : **Lecture d'un vecteur normal.** Le plan d'équation $3x - 2y + z - 5 = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 Déterminer l'équation d'un plan à partir de deux vecteurs**Méthode**

Pour trouver un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ à un plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on résout le système

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

puis on détermine d avec un point du plan.

Méthode

Exemple : Plan dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, passant par $O(0;0;0)$.

On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

En choisissant $b = -1$, on obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme le plan passe par O , $d = 0$: une équation est $x - y + z = 0$.

4 Intersection d'une droite et d'un plan

Méthode

Pour déterminer l'intersection d'une droite (donnée par sa représentation paramétrique) et d'un plan (donné par son équation cartésienne), on remplace x, y, z en fonction de k dans l'équation du plan, puis on résout en k .

Méthode

Exemple : Droite $\begin{cases} x = k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - k \end{cases}$ et plan d'équation $x + y + z - 4 = 0$.

On remplace dans l'équation du plan :

$$k + (1 + k) + (2 - k) - 4 = 0 \iff k - 1 = 0 \iff k = 1.$$

On reporte $k = 1$: $x = 1, y = 2, z = 1$. Le point d'intersection est $I(1; 2; 1)$.

À retenir

Droite : $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ ($\vec{u}$ vecteur directeur).

Plan : $ax + by + cz + d = 0$, avec $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur normal.

Vecteur normal : résoudre $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Intersection droite/plan : substituer la paramétrisation dans l'équation, résoudre en k .