

Fonction logarithme népérien

TERMINALE

1 Définition et propriétés immédiates

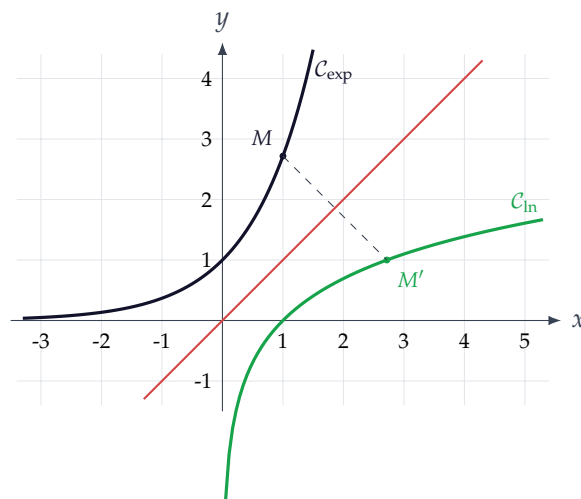
Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x > 0$ et tout réel y :

$$\ln(x) = y \iff x = e^y.$$

Propriété — Propriétés immédiates

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 & \ln(e) &= 1 \\ \ln(e^x) &= x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} & e^{\ln(x)} &= x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$



Les courbes de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2 Propriétés algébriques

Propriété

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) \quad \ln(a^n) = n \ln(a) \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Méthode

Exemple : Simplifier $A = \ln 8$ et $B = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

$$A = \ln(2^3) = 3 \ln 2 ; \quad B = -\ln(e) = -1.$$

3 Dérivées et variations**Propriété — Dérivées**

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0 \qquad (\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ pour } u(x) > 0$$

Propriété — Variations

Comme $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, la fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln(x)$		$+\infty$
		$-\infty$

4 Limites**Propriété**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

5 Signe**Propriété**

La fonction $\ln$ change de signe en 1 :

- pour tout x tel que $0 < x < 1$: $\ln x < 0$;
- pour tout x tel que $x > 1$: $\ln x > 0$;
- et $\ln 1 = 0$.

6 Équations et inéquations

Propriété — Équations

Pour $x > 0, y > 0$, et a, b réels strictement positifs différents de 1 :

$$\ln x = a \iff x = e^a \quad \ln x = \ln y \iff x = y \quad a^n = b \iff n = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Propriété — Inéquations

Comme $\ln$ est strictement croissante, pour $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln x \geq a \iff x \geq e^a \quad \ln x \geq \ln y \iff x \geq y \quad a^n \geq b \iff n \ln a \geq \ln b$$

Méthode

Exemple : Résoudre, pour $x > 0$, l'inéquation $\ln x \leq 0$.

$$\ln x \leq 0 \iff \ln x \leq \ln 1 \iff x \leq 1.$$

Avec la contrainte $x > 0$, l'ensemble solution est $]0; 1]$.

À retenir

Propriétés : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Dérivée : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\ln$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Limites : $\ln x \rightarrow -\infty$ en 0^+ , $+\infty$ en $+\infty$; croissance comparée $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$.

Signe : $\ln x < 0$ sur $]0; 1[$, $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.