

Suites (III) — Convergence monotone

TERMINALE

1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition

Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n .
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout n .
- (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Méthode

Exemple : La suite $u_n = (-1)^n$ vérifie $-1 \leq u_n \leq 1$ pour tout n : elle est minorée par -1 , majorée par 1 , donc **bornée**.

2 Sens de variation

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n , la suite est **croissante** ;
- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n , la suite est **décroissante**.

Exemple : Pour $u_n = n^2 - n$:

$$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - (n+1)] - [n^2 - n] = (n^2 + n) - (n^2 - n) = 2n \geq 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3 Convergence des suites monotones

Propriété

Théorème de convergence monotone :

- Toute suite **croissante et majorée** converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.

À retenir

Le théorème garantit l'**existence** de la limite mais ne la donne pas. Pour la déterminer, on passe à la limite dans la relation de récurrence : si $u_n \rightarrow L$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, alors L vérifie $L = f(L)$ (Théorème du point fixe).

4 Application

Méthode

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. On admet que (u_n) est croissante et que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .

(u_n) est croissante et majorée par 2 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers un réel L .

En passant à la limite dans $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$:

$$L = \frac{1}{2}L + 1 \iff \frac{1}{2}L = 1 \iff L = 2.$$

La suite (u_n) converge donc vers 2.

À retenir

Bornée : majorée *et* minorée.

Variation : signe de $u_{n+1} - u_n$.

Monotone bornée : une suite croissante majorée (ou décroissante minorée) *converge* toujours.