

Temps d'attente

Loi géométrique, lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

1 Loi géométrique

Définition

On répète une épreuve de Bernoulli de paramètre p ($0 < p < 1$) de façon indépendante, **jusqu'au premier succès**. Le rang X du premier succès suit la **loi géométrique** de paramètre p : pour tout entier $k \geq 1$,

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad (k - 1 \text{ échecs, puis un succès}).$$

Propriété

$$P(X > k) = (1 - p)^k \quad E(X) = \frac{1}{p}$$

Absence de mémoire : pour tous entiers k et m , $P_{X>k}(X > k + m) = P(X > m)$. Avoir déjà échoué k fois ne change rien pour la suite.

Méthode

Exemple : On lance un dé jusqu'à obtenir un 6 ($p = \frac{1}{6}$).

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0,116 \quad P(X > 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,162 \quad E(X) = 6$$

En moyenne, il faut 6 lancers pour obtenir le premier 6.

2 Lois continues à densité

Densité de probabilité

Une **densité** sur un intervalle I est une fonction f continue, positive sur I , telle que l'aire totale sous sa courbe vaut 1.

Une variable aléatoire X suit la loi de densité f si, pour tout intervalle $[a; b] \subset I$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

Propriété

- $P(X = a) = 0$: les inégalités peuvent être larges ou strictes indifféremment.
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
- L'espérance est $E(X) = \int_I t f(t) dt$ (si l'intégrale existe).

3 Loi uniforme continue sur $[a; b]$

Définition

X suit la **loi uniforme** sur $[a; b]$ si sa densité est constante : $f(t) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a; b]$.

Propriété

Pour $[c; d] \subset [a; b]$: $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$ (rapport des longueurs) $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Méthode

Exemple : Un bus passe toutes les 15 minutes. Un usager arrive au hasard : son temps d'attente X suit la loi uniforme sur $[0; 15]$.

$$P(X \leq 5) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad P(3 \leq X \leq 9) = \frac{6}{15} = 0,4 \quad E(X) = 7,5 \text{ min}$$

4 Loi exponentielle

Définition

Soit $\lambda > 0$. X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ si sa densité sur $[0; +\infty[$ est

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

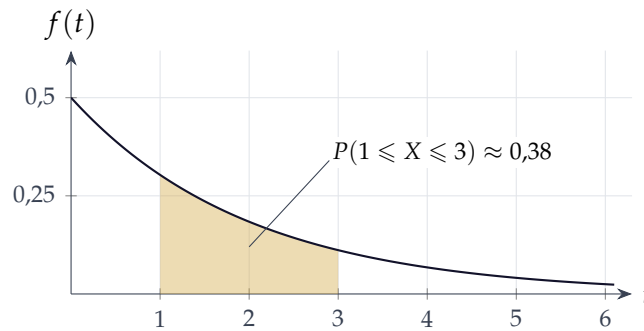
Elle modélise des durées de vie « sans vieillissement » (composants électroniques, désintégration radioactive, temps entre deux appels...).

Calculs avec la loi exponentielle

Une primitive de $\lambda e^{-\lambda t}$ est $-e^{-\lambda t}$, d'où, pour $0 \leq a \leq b$:

$$P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a} \quad P(X > a) = e^{-\lambda a} \quad P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- **Espérance (admis)** : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, la durée de vie moyenne.
- **Absence de mémoire** : $P_{X>s}(X > s+t) = P(X > t)$ pour tous $s, t \geq 0$.
- **Demi-vie** : $P(X \leq t_{1/2}) = \frac{1}{2} \iff t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.



Densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$: l'aire dorée vaut $e^{-0,5} - e^{-1,5}$.

Méthode — durée de vie d'un composant

Exemple : La durée de vie X (en années) d'un composant suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Durée de vie moyenne : $E(X) = \frac{1}{0,2} = 5$ ans .
2. Probabilité qu'il tombe en panne la première année : $P(X \leq 1) = 1 - e^{-0,2} \approx 0,181$.
3. Probabilité qu'il dure plus de 5 ans : $P(X > 5) = e^{-1} \approx 0,368$ (moins d'une chance sur deux de dépasser la moyenne !).
4. Sachant qu'il a déjà fonctionné 3 ans, probabilité qu'il dure encore au moins 2 ans : par absence de mémoire, $P_{X>3}(X > 5) = P(X > 2) = e^{-0,4} \approx 0,670$.

À retenir

- Géométrique : $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, $P(X > k) = (1 - p)^k$, $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Densité : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$; $P(X = a) = 0$.
- Uniforme sur $[a; b]$: rapport de longueurs, $E = \frac{a+b}{2}$.
- Exponentielle : $P(X > a) = e^{-\lambda a}$, $E = \frac{1}{\lambda}$, demi-vie $\frac{\ln 2}{\lambda}$, sans mémoire.
- Piège : pour une loi à densité, $P(X \leq a)$ est une **aire**, pas la valeur $f(a)$ de la densité (qui peut dépasser 1).