

Espace (II) — Orthogonalité et distances

TERMINALE

1 Produit scalaire dans l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Leur **produit scalaire** peut s'exprimer de plusieurs façons :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, en notant H le projeté orthogonal de C sur (AB) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \pm AB \times AH$$

En base orthonormée, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Propriété

On dispose aussi des expressions avec les normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Méthode

Exemple : Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times 0 + (-1) \times 1 = 3 + 0 - 1 = 2.$$

2 Opérations avec les vecteurs

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

3 Orthogonalité

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

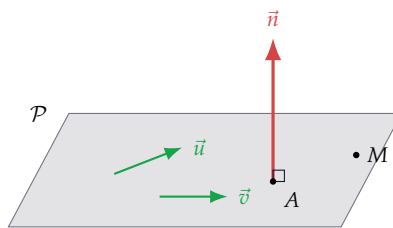
Méthode

Exemple : Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 4 + 2 = 0$: ils sont **orthogonaux**.

4 Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur $\vec{n}$ non nul est **normal** à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Il est alors orthogonal à *tout* vecteur du plan.



Méthode

Exemple : Un plan $\mathcal{P}$ est dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 - 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$: il est **normal** à $\mathcal{P}$.

5 Projeté orthogonal et distances

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point P sur une droite (ou un plan) est le point d'intersection de cette droite (ou de ce plan) avec la perpendiculaire abaissée depuis P .

Propriété — Distance entre deux points

En repère orthonormé, si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Propriété — Distance d'un point à un plan

La distance d'un point P à un plan $\mathcal{P}$ est la distance entre P et son **projeté orthogonal** H sur le plan. C'est la *plus courte* distance entre P et un point quelconque du plan : $d(P, \mathcal{P}) = PH$.

Méthode

Exemple : Avec $A(1;0;2)$ et $B(3;2;2)$:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

À retenir

Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.

Orthogonalité : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vecteur normal : orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan.

Distances : $AB = \sqrt{x_{\vec{AB}}^2 + y_{\vec{AB}}^2 + z_{\vec{AB}}^2}$; $d(P, \mathcal{P}) = PH$ (H projeté orthogonal de P).