

Mouvements dans un champ

TERMINALE

1 Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Définition

Un système est en **chute libre** lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids. Le champ de pesanteur est dit **uniforme** si $\vec{g}$ garde la même valeur et la même direction dans tout le domaine étudié — ce qui est le cas pour des mouvements de quelques dizaines de mètres.

Méthode — Établir les équations horaires

Un projectile est lancé depuis l'origine avec une vitesse $v_0 = 12 \text{ m/s}$ faisant un angle $\alpha = 40^\circ$ avec l'horizontale. On prend $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

1. Deuxième loi de Newton (chapitre 7), le poids étant la seule force :

$$m \vec{g} = m \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

L'accélération ne dépend **pas de la masse** : tous les corps tombent de la même façon.

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

2. Le mouvement est plan. L'accélération est verticale et la vitesse initiale est dans le plan (Oxy) : rien ne pousse jamais le projectile hors de ce plan. On peut donc se contenter de deux coordonnées.

3. Vitesse — on intègre, les constantes étant les composantes de $\vec{v}_0$:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 9,19 \text{ m/s} \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 7,71 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 9,19 \\ -9,81 t + 7,71 \end{pmatrix}$$

4. Position — on intègre une seconde fois, les constantes étant nulles puisque le départ est à l'origine :

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x = 9,19 t \\ y = -4,905 t^2 + 7,71 t \end{pmatrix}$$

Méthode — Trajectoire, flèche et portée

1. Équation de la trajectoire : on tire $t = x/9,19$ de la première équation et on le reporte dans la seconde.

$$y = -4,905 \left(\frac{x}{9,19} \right)^2 + 7,71 \times \frac{x}{9,19} = -0,0581 x^2 + 0,839 x$$

C'est une **parabole**, tournée vers le bas.

2. Flèche (altitude maximale) : au sommet, $v_y = 0$.

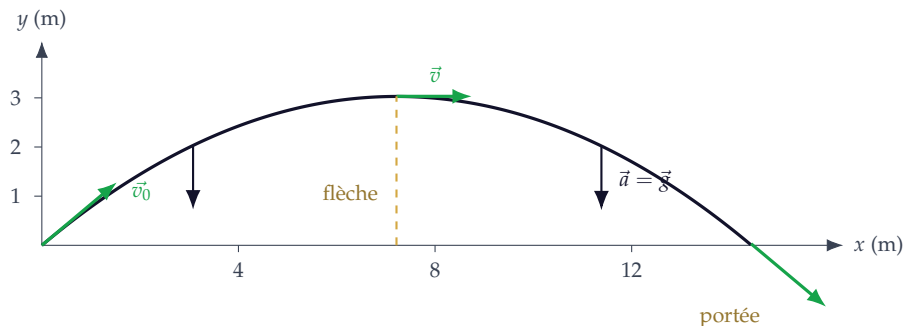
$$-9,81 t + 7,71 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_s = 0,79 \text{ s} \quad y_s = 3,0 \text{ m}$$

3. **Portée** : on cherche le second point où $y = 0$.

$$t(-4,905t + 7,71) = 0 \implies t_P = 2t_S = 1,57 \text{ s}$$

$$x_P = 9,19 \times 1,57 = 14,4 \text{ m}$$

4. **Contrôle** : la trajectoire est symétrique, la portée est atteinte au double du temps du sommet.
✓



Au sommet, la vitesse n'est **pas nulle** : seule sa composante verticale s'annule. Le projectile conserve $v_x = 9,19 \text{ m/s}$ tout au long du vol, puisque aucune force n'agit horizontalement.

2 Aspects énergétiques

Propriété

En chute libre, le poids est la seule force : **l'énergie mécanique se conserve**.

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{constante}$$

Lorsque d'autres forces travaillent, on utilise le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$$

Méthode — Retrouver la flèche par l'énergie

On reprend le projectile précédent, sans utiliser les équations horaires.

1. Au départ, $z = 0$ et $v = v_0$; au sommet, $z = y_S$ et $v = v_{0x}$ (la composante verticale est nulle).
2. Conservation de l'énergie mécanique, la masse se simplifiant :

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v_{0x}^2 + g y_S \implies y_S = \frac{v_0^2 - v_{0x}^2}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$y_S = \frac{7,71^2}{2 \times 9,81} = 3,0 \text{ m}$$

3. On retrouve la même valeur qu'en §1, sans passer par le temps. ✓ La méthode énergétique est bien plus rapide dès qu'on ne demande pas d'instant.

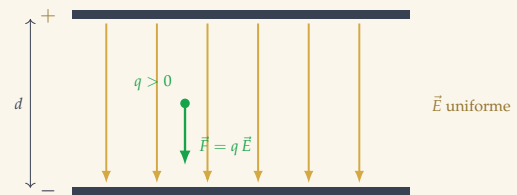
3 Le champ électrique d'un condensateur plan

Propriété

Entre les deux armatures d'un condensateur plan séparées de d et soumises à la tension U , le champ électrique est **uniforme**, perpendiculaire aux plaques et dirigé de la plaque $+$ vers la plaque $-$:

$$E = \frac{U}{d} \quad \text{en V/m}$$

Le champ est donc d'autant plus intense que la tension est **grande** et que les plaques sont **proches**.



Propriété

Une particule de charge q placée dans ce champ subit la force $\vec{F} = q \vec{E}$. Si $q > 0$, la force a le **même sens** que $\vec{E}$; si $q < 0$ (un électron), elle a le sens **opposé**.

Le poids est en général totalement négligeable devant cette force : pour un proton dans un champ de 10^4 V/m, le rapport F/P dépasse 10^{11} .

4 Accélérer une particule chargée

Méthode — Le principe de l'accélérateur linéaire

Un proton, initialement au repos, est accéléré entre deux électrodes soumises à une tension $U = 2,0$ kV. On donne $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg et $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C.

1. Le poids étant négligeable, la seule force est électrique. Le théorème de l'énergie cinétique donne, entre le départ et l'arrivée :

$$\frac{1}{2} m_p v^2 - 0 = W(\vec{F}) = q U = e U$$

2. On isole la vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{2 e U}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,60 \times 10^{-19} \times 2,0 \times 10^3}{1,67 \times 10^{-27}}} = 6,2 \times 10^5 \text{ m/s}$$

3. **Principe de l'accélérateur linéaire** : une seule accélération ne suffit pas à atteindre de grandes vitesses. On aligne donc n tubes successifs, en **alternant** la polarité au bon rythme pour que la particule soit accélérée à chaque intervalle. L'énergie s'accumule :

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = n e U \quad \Rightarrow \quad v_n = \sqrt{\frac{2 n e U}{m}}$$

4. Avec $n = 100$ étages identiques, la vitesse est multipliée par $\sqrt{100} = 10$, soit $6,2 \times 10^6$ m/s.

La vitesse croît comme la **racine** du nombre d'étages, pas proportionnellement : c'est pourquoi les accélérateurs de particules atteignent des longueurs kilométriques. Au-delà de quelques pour cent de c , il faut de surcroît un traitement relativiste, hors programme.

5 Mouvement dans un champ de gravitation

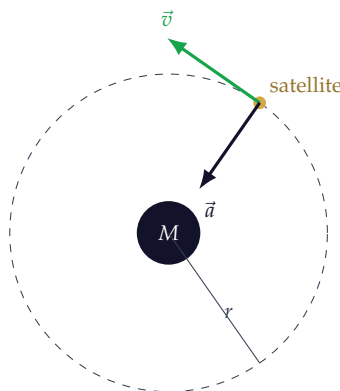
Propriété

Un satellite de masse m en orbite **circulaire** de rayon r autour d'un astre de masse M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle, dirigée vers le centre :

$$F = G \frac{M m}{r^2} \quad \text{avec} \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

La deuxième loi de Newton donne alors, la masse du satellite se simplifiant :

$$a = \frac{G M}{r^2} \quad (\text{centripète})$$



mouvement circulaire
uniforme :
 $\vec{a}$ est centripète,
de norme $\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}$

Méthode — Vitesse et période d'un satellite

La Station spatiale internationale orbite à $h = 400$ km d'altitude. On donne $R_T = 6370$ km et $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg.

1. Rayon de l'orbite — mesuré depuis le *centre* de la Terre :

$$r = R_T + h = 6370 + 400 = 6770 \text{ km} = 6,77 \times 10^6 \text{ m}$$

2. Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération vaut aussi v^2/r dans le repère de Frenet (chapitre 6). En égalant les deux expressions :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6,77 \times 10^6}} = 7,7 \times 10^3 \text{ m/s}$$

3. La vitesse ne dépend **pas de la masse du satellite** — elle n'est fixée que par l'altitude.

4. Période de révolution :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 6,77 \times 10^6}{7,67 \times 10^3} = 5,5 \times 10^3 \text{ s} = 92 \text{ minutes}$$

6 Les lois de Kepler

Propriété

Première loi — les planètes décrivent des **ellipses** dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Deuxième loi (loi des aires) — le segment reliant le Soleil à la planète balaie des **aires égales en des durées égales** : la planète va plus vite au périhélie qu'à l'aphélie.

Troisième loi — le rapport du carré de la période au cube du demi-grand axe est le **même pour tous** les astres en orbite autour du même corps.

Méthode — Établir la troisième loi (orbite circulaire)

1. On repart de $v = \sqrt{GM/r}$ et de $T = \frac{2\pi r}{v}$:

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

2. On élève au carré pour supprimer la racine :

$$T^2 = 4\pi^2 r^2 \times \frac{r}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

3. Le membre de droite ne contient que G et la masse de l'astre central : il est bien **le même pour tous** les satellites de cet astre, quelles que soient leur masse et leur orbite.

Méthode — Le satellite géostationnaire

Un satellite est **géostationnaire** s'il reste à la verticale du même point de l'équateur. Sa période doit donc être celle de la rotation de la Terre : $T = 86\,164\text{ s}$.

1. On isole r dans la troisième loi :

$$r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} = \frac{3,98 \times 10^{14} \times (8,6164 \times 10^4)^2}{4\pi^2} = 7,49 \times 10^{22} \text{ m}^3$$

$$r = (7,49 \times 10^{22})^{1/3} = 4,21 \times 10^7 \text{ m}$$

2. Altitude correspondante :

$$h = r - R_T = 42\,100 - 6\,370 = 35\,700 \text{ km}$$

3. **Deux conditions supplémentaires** : l'orbite doit être dans le **plan équatorial** et parcourue dans le **même sens** que la rotation terrestre. Sinon le satellite dériverait par rapport au sol.

4. Contrôle : r vaut environ $6,6 R_T$ — c'est bien l'orbite des satellites de télécommunication, qui explique le retard perceptible sur certaines liaisons.

! Dans toutes ces formules, r est le rayon de l'**orbite**, donc la distance au *centre* de l'astre — et non l'altitude. Oublier d'ajouter R_T est l'erreur la plus coûteuse du chapitre.

À retenir

- **Champ uniforme** : $\vec{a}$ est **constant**, la trajectoire est une **parabole** et le mouvement est **plan**.
- En chute libre, $\vec{a} = \vec{g}$: le mouvement ne dépend **pas de la masse**.
- On intègre deux fois pour obtenir les équations horaires, puis on élimine t pour la trajectoire.
- **Énergie mécanique conservée** en chute libre : $\frac{1}{2}mv^2 + mgz$ constante — plus rapide quand le temps n'est pas demandé.
- **Condensateur plan** : $E = \frac{U}{d}$ et $\vec{F} = q \vec{E}$. Accélérateur : $\frac{1}{2}mv^2 = neU$.
- **Satellite circulaire** : $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, indépendante de sa masse ; $T = \frac{2\pi r}{v}$.
- **Troisième loi de Kepler** : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, la même pour tous les satellites d'un même astre.
- **Piège** : $r = R_T + h$, jamais h seule.