

Fonctions (III) — Continuité, TVI

TERMINALE

1 Continuité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction f est **continue en a** si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

f est **continue sur I** si elle est continue en chaque point de I . Graphiquement, la courbe se trace « sans lever le crayon ».

Propriété — Continuité des fonctions usuelles

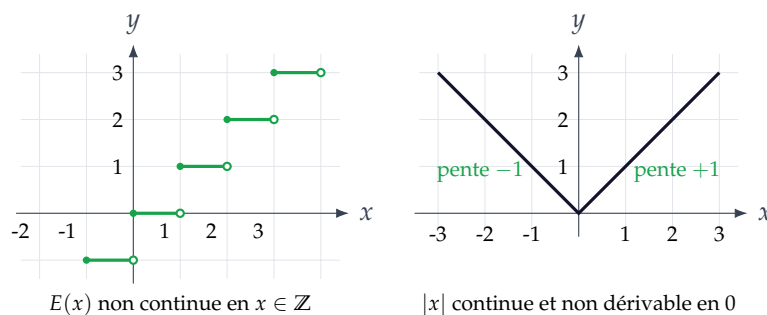
Toutes les fonctions construites par **somme, produit, quotient** ou **composition** à partir de fonctions élémentaires (polynômes, racine, exponentielle, valeur absolue...) sont continues sur leur ensemble de définition.

Propriété — Continuité et dérivabilité

Soit f une fonction et a un réel.

$$f \text{ dérivable en } a \implies f \text{ continue en } a.$$

La réciproque est **fausse** : f continue en a n'implique pas f dérivable en a .



2 Continuité et suites

Propriété

Soit une suite (u_n) définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f est continue en ℓ , alors ℓ vérifie l'équation

$$f(\ell) = \ell.$$

Méthode

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . La fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$ étant continue, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$:

$$\sqrt{\ell+2} = \ell \iff \ell+2 = \ell^2 \ (\ell \geq 0) \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff \ell = 2.$$

La suite (u_n) converge donc vers 2.

3 Continuité et équations**Propriété — Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution c dans $[a; b]$.

Propriété — Corollaire (théorème de la bijection)

Soit f continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans $[a; b]$.

Méthode

Exemple : Montrer que $f(x) = x^3 + x - 1$ admet une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 1]$.

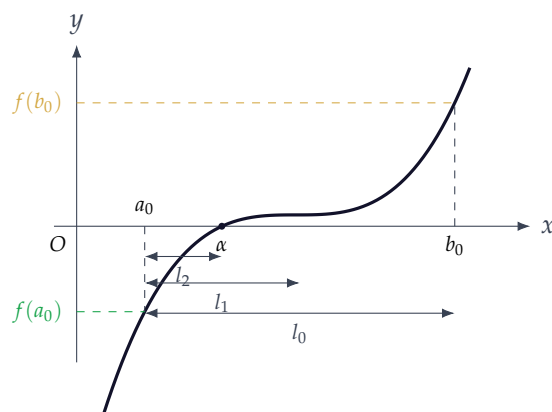
f est continue sur $[0; 1]$ (polynôme). De plus $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante.

On calcule $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

D'après le corollaire du T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $[0; 1]$.

4 Résolution de $f(x) = 0$ par dichotomie**Méthode**

Pour encadrer une solution α de $f(x) = 0$ sur $[a; b]$, la méthode par **dichotomie** consiste à réduire l'intervalle en le divisant par 2 : on calcule f au milieu $m = \frac{a+b}{2}$ et on conserve la moitié de l'intervalle aux bornes de signes opposés. On recommence jusqu'à obtenir l'encadrement voulu.



À retenir

Continuité : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Dérivable $\Rightarrow$ **continue** (réciproque fausse).

T.V.I. : continue + k entre $f(a)$ et $f(b)$ $\Rightarrow$ au moins une solution.

Corollaire : continue *et* strictement monotone $\Rightarrow$ solution *unique*.

Dichotomie : on divise l'intervalle par 2 à chaque étape pour encadrer α .