

EXPÉRIENCES RÉPÉTÉES, ÉCHANTILLONNAGE

— TERMINALE — MATHS COMPLÉMENTAIRES —

1. LOI UNIFORME DISCRÈTE 2. ÉPREUVE ET LOI DE BERNOULLI

Loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$

Chaque valeur a la même probabilité : $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Dé à 6 faces : $E(X) = 3,5$; $V(X) = \frac{35}{12} \approx 2,92$.

Épreuve de Bernoulli

Expérience à deux issues : **succès** (probabilité p) ou **échec** ($1 - p$). La variable valant 1 en cas de succès, 0 sinon, suit la **loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$.

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p) \\ \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

3. SCHÉMA DE BERNOULLI ET LOI BINOMIALE

Un **schéma de Bernoulli** $(n; p)$ répète n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**. Le **nombre de succès** X suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$.

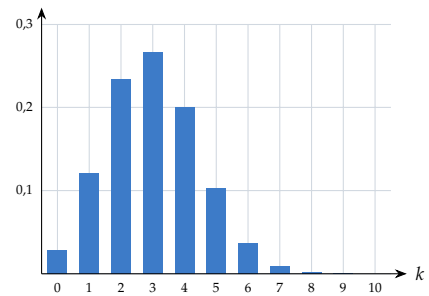
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$$

$\binom{n}{k}$: nombre de chemins de l'arbre avec k succès (calculatrice ou triangle de Pascal).

Exemple : QCM de 10 questions à 4 choix, au hasard

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0,25) : P(X = 3) = 120 \times 0,25^3 \times 0,75^7 \approx 0,250 \\ P(X \geq 1) = 1 - 0,75^{10} \approx 0,944 \quad E(X) = 2,5$$



Loi $\mathcal{B}(10; 0,3)$: les probabilités se concentrent autour de $np = 3$.

« **Au moins un succès** » : on passe par le contraire, $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$.

4. ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION

Échantillon de taille n , proportion p du caractère : $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ et la **fréquence** $F = \frac{X}{n}$ vérifie $E(F) = p$.

Fluctuation (p connu) au seuil de 95 %

Pour $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$:

$$\left[p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Si f n'y est pas : on **rejette** l'hypothèse « la proportion est p » (risque 5 %).

Confiance (p inconnu) au niveau 95 %

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

contient p avec une confiance d'au moins 95 %.

Fluctuation : 4 % de défauts annoncés, 26 sur 400 : $f = 0,065 \notin [0,021; 0,059]$, machine déréglée.

Estimation : 46 % sur 1 000 sondés : $p \in [0,428; 0,492]$.

5. MÉTHODES TYPES

Justifier une loi binomiale

1. identifier l'épreuve et le succès ;
2. n répétitions identiques et indépendantes ;
3. conclure $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Trouver n pour « au moins un »

1. écrire $1 - (1-p)^n \geq s$;
2. isoler $(1-p)^n \leq 1-s$;
3. appliquer $\ln$, diviser par $\ln(1-p) < 0$: le sens change.

Fluctuation ou estimation ?

1. p connu : intervalle de fluctuation, décision ;
2. p inconnu : intervalle de confiance ;
3. toujours vérifier les conditions sur n .

À RETENIR

❏ Bernoulli : $E = p$,
 $V = p(1-p)$;
uniforme : $E = \frac{n+1}{2}$.

📊 Binomiale : n épreuves
identiques,
indépendantes, deux
issues.

🕒 $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,
 $E = np$.

📊 Fluctuation :
 $p \pm 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$;
confiance : $f \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.

💡 « Au moins un » :
 $1 - (1-p)^n$.