

Expériences répétées, échantillonnage

Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, fluctuation et estimation

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

1 Loi uniforme discrète

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $\{1; 2; \dots; n\}$ si elle prend chacune de ces valeurs avec la même probabilité : $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

Propriété

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Méthode

Exemple : Lancer d'un dé équilibré à 6 faces : $E(X) = \frac{7}{2} = 3,5$ et $V(X) = \frac{35}{12} \approx 2,92$, donc $\sigma(X) \approx 1,71$.

2 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues : **succès** S (probabilité p) et **échec** $\bar{S}$ (probabilité $1 - p$).

La variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Propriété

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

3 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, de même probabilité de succès p .

La variable X comptant le **nombre de succès** suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$

Pour tout entier k entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p)$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») est le nombre de chemins de l'arbre comportant exactement k succès. Il se calcule à la calculatrice ou avec le triangle de Pascal ; par exemple $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

Méthode — reconnaître et utiliser une loi binomiale

Exemple : Un QCM comporte 10 questions à 4 choix dont un seul est correct. Un élève répond au hasard. X = nombre de bonnes réponses.

1. **Justification** : 10 épreuves identiques et indépendantes, à deux issues (succès = bonne réponse, $p = 0,25$) : $X \sim \mathcal{B}(10; 0,25)$.
2. $P(X = 0) = 0,75^{10} \approx 0,056$ $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,25^3 \times 0,75^7 = 120 \times 0,25^3 \times 0,75^7 \approx 0,250$.
3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,944$ (on passe par l'événement contraire).
4. $E(X) = 10 \times 0,25 = 2,5$: en moyenne, 2,5 bonnes réponses.

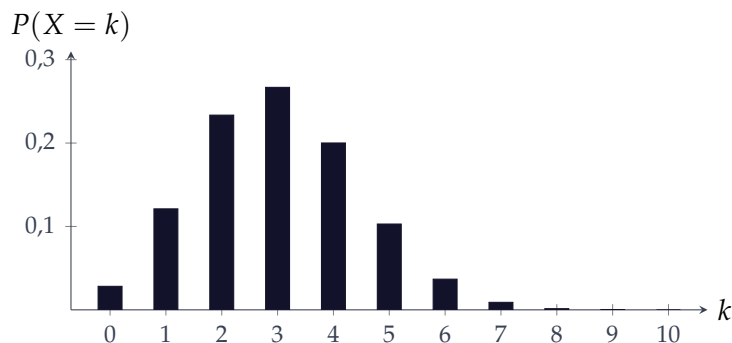


Diagramme de la loi $\mathcal{B}(10; 0,3)$: les probabilités se concentrent autour de l'espérance $np = 3$.

4 Échantillonnage et estimation**Fréquence d'échantillon**

On prélève au hasard un échantillon de taille n dans une population où la proportion d'un caractère est p (tirages assimilés à des tirages avec remise). Le nombre X d'individus présentant le caractère suit $\mathcal{B}(n; p)$, et la **fréquence** observée est $F = \frac{X}{n}$, avec $E(F) = p$.

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

Pour $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, la fréquence F appartient, avec une probabilité d'environ 0,95, à

$$I_F = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

Prise de décision : si la fréquence observée f n'appartient pas à I_F , on rejette l'hypothèse « la proportion est p » au risque d'erreur de 5 %.

Intervalle de confiance (estimation)

Si la proportion p est **inconnue**, on l'estime à partir de la fréquence f observée sur un échantillon de taille n : l'intervalle

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

contient p avec un niveau de confiance d'au moins 95 % (pour $n \geq 30$, $nf \geq 5$, $n(1-f) \geq 5$).

Méthode — fluctuation ou estimation ?

Exemple : Fluctuation (on connaît p). Une machine produit 4 % de pièces défectueuses. Sur 400 pièces, on en trouve 26. Est-ce anormal ?

$$I_F = \left[0,04 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{400}} \right] \approx [0,021 ; 0,059] \quad f = \frac{26}{400} = 0,065 \notin I_F$$

On **rejette** l'hypothèse $p = 0,04$ au risque de 5 % : la machine est probablement déréglée.

Exemple : Estimation (on ne connaît pas p). Un sondage auprès de 1 000 personnes donne 46 % d'opinions favorables :

$$\left[0,46 - \frac{1}{\sqrt{1000}} ; 0,46 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0,428 ; 0,492]$$

Avec une confiance de 95 %, la proportion d'opinions favorables est comprise entre 42,8 % et 49,2 %.

À retenir

- Bernoulli : $E = p$, $V = p(1-p)$. Uniforme sur $\{1; \dots; n\}$: $E = \frac{n+1}{2}$.
- Binomiale : n épreuves **identiques et indépendantes** à deux issues ; $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E = np$, $V = np(1-p)$.
- « Au moins un succès » : $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$.
- Fluctuation (p connu) : $p \pm 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Confiance (p inconnu) : $f \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- **Piège** : justifier *toutes* les conditions de la loi binomiale (identiques, indépendantes, deux issues, paramètres) avant d'appliquer la formule.