

Probabilités (I) — Bernoulli et loi binomiale

TERMINALE

1 Succession d'épreuves

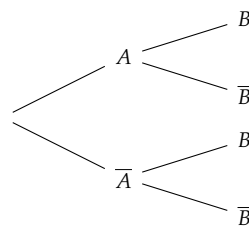
Propriété — Épreuves indépendantes

Lors de la répétition de n épreuves **indépendantes**, la probabilité d'une issue $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ est le **produit** des probabilités :

$$p((x_1; x_2; \dots; x_n)) = p(x_1) \times p(x_2) \times \dots \times p(x_n).$$

Propriété — Épreuves non indépendantes

Lorsque les épreuves ne sont pas indépendantes, on trace et on utilise un **arbre pondéré** : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.



2 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition

Une épreuve est une **épreuve de Bernoulli** si elle n'a que **deux issues** : le succès (probabilité p) et l'échec (probabilité $1 - p$).

Propriété — Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

La variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$:

$$p(X = 1) = p \quad p(X = 0) = 1 - p.$$

3 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition

Un **schéma de Bernoulli** est une succession *indépendante* de n répétitions de la *même* épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Définition

Dans un schéma de Bernoulli à n épreuves, la variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$.

Propriété — Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k},$$

où $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès. De plus :

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

Méthode

Exemple : Pour $X \sim \mathcal{B}(5; 0,2)$:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} (0,2)^2 (0,8)^3 = 10 \times 0,04 \times 0,512 = 0,2048,$$

et $E(X) = 5 \times 0,2 = 1$.

4 Intervalle de fluctuation**Définition**

I est un **intervalle de fluctuation** au seuil de $1 - \alpha$ si $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$.

Propriété — Intervalle de fluctuation centré

L'intervalle $[a; b]$ où a et b sont les *plus petits entiers* tels que

$$P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

est un intervalle de fluctuation **centré** au seuil de $1 - \alpha$.

À retenir

Épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue est le produit des probabilités.

Loi binomiale : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Paramètres : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Fluctuation : I tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$.