

INFÉRENCE BAYÉSIENNE

— TERMINALE – MATHS COMPLÉMENTAIRES —

1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET ARBRE

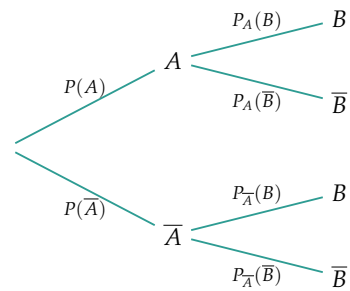
La probabilité de B sachant A ($P(A) \neq 0$) est la probabilité que B se réalise lorsqu'on sait que A est réalisé :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Règles de l'arbre pondéré

1. les branches issues d'un même nœud somment à 1 ;
2. probabilité d'un chemin = **produit** des branches ;
3. **probabilités totales** :

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)$$



Exemple : 60 % à l'usine (U), dont 30 % en transports (T) ; 50 % des autres en transports.

$$P(T) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 = 0,38.$$

2. INVERSEMENT DU CONDITIONNEMENT : FORMULE DE BAYES

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)}$$

L'arbre donne $P_A(B)$ (cause $\rightarrow$ effet) ; Bayes remonte de l'effet observé à la cause : c'est l'**inférence bayésienne**. $P(A)$ est la probabilité **a priori**, $P_B(A)$ la probabilité **a posteriori**.

Tests diagnostiques

prévalence $P(M)$ **sensibilité** $P_M(T)$
spécificité $P_{\bar{M}}(\bar{T})$ **valeur prédictive positive** $P_T(M)$

Le paradoxe du test positif

Prévalence 2 %, sensibilité 95 %, spécificité 90 %, sur 10 000 personnes :

	T	$\bar{T}$	total
M	190	10	200
$\bar{M}$	980	8820	9800
total	1170	8830	10000

$$P_T(M) = \frac{190}{1170} \approx 0,16$$

Seulement 16 % des positifs sont malades : la maladie est **rare**, les faux positifs sont nombreux.

3. RAPPELS SUR L'INDÉPENDANCE

A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ce qui équivaut (si $P(A) \neq 0$) à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B , $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Exemple : $P(U) \times P(T) = 0,6 \times 0,38 = 0,228 \neq 0,18 = P(U \cap T)$: U et T ne sont **pas** indépendants.

Attention

Indépendants $\neq$ incompatibles : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont **jamais** indépendants.

4. MÉTHODES TYPES

Exploiter un arbre

1. traduire l'énoncé : $P(A)$, $P_A(B)$...
2. multiplier le long des chemins ;
3. additionner les chemins menant à B .

Inverser le conditionnement

1. calculer $P(A \cap B)$ par l'arbre ;
2. calculer $P(B)$ (probabilités totales) ;
3. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, puis interpréter.

Tester l'indépendance

1. calculer $P(A) \times P(B)$;
2. comparer à $P(A \cap B)$;
3. ou comparer $P_A(B)$ et $P(B)$.

À RETENIR

🕒 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; on multiplie le long d'un chemin.

📊 Probabilités totales : on additionne les chemins.

🔄 Bayes : $P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$.

✅ Indépendance : $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

💡 $P_A(B) \neq P_B(A)$: sensibilité $\neq$ valeur prédictive.