

# RÉPARTITION DES RICHESSES, INÉGALITÉS

## — TERMINALE – MATHS COMPLÉMENTAIRES —

### 1. DES OUTILS STATISTIQUES

#### Médiane, déciles, rapport interdécile

Revenus rangés par ordre croissant :

- la **médiane**  $Me$  partage la population en deux moitiés ;
- $D_1$  : 10 % des individus gagnent moins ;  $D_9$  : 90 % gagnent moins ;
- le **rapport interdécile** mesure l'écart entre les plus aisés et les plus modestes :

$$\frac{D_9}{D_1}$$

France (2021) :  $D_1 \approx 12\,000$  €,  $D_9 \approx 40\,000$  € : rapport  $\approx 3,3$ .

#### Courbe de Lorenz d'une série

Pour chaque fraction  $x$  de la population (les plus modestes),  $y$  est la fraction du revenu total qu'elle perçoit. On relie les points de  $(0;0)$  à  $(1;1)$ .

- égalité parfaite** :  $y = x$  (diagonale) ;
- plus la courbe s'éloigne de la diagonale, plus c'est **inégalitaire**.

| Quintile       | 1 <sup>er</sup> | 2 <sup>e</sup> | 3 <sup>e</sup> | 4 <sup>e</sup> | 5 <sup>e</sup> |
|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| part du revenu | 5 %             | 10 %           | 15 %           | 25 %           | 45 %           |
| $x$ cumulé     | 0,2             | 0,4            | 0,6            | 0,8            | 1              |
| $y$ cumulé     | 0,05            | 0,15           | 0,30           | 0,55           | 1              |

Les 60 % les plus modestes perçoivent 30 % du revenu total.

### 2. DES OUTILS ISSUS DE L'ANALYSE

#### Fonction de Lorenz

$L$  définie sur  $[0;1]$  est une fonction de Lorenz si :

- $L$  est **continue** et **croissante** sur  $[0;1]$  ;
- $L(0) = 0$  et  $L(1) = 1$  ;
- $L(x) \leq x$  pour tout  $x \in [0;1]$ .

En pratique,  $L$  est aussi **convexe**.

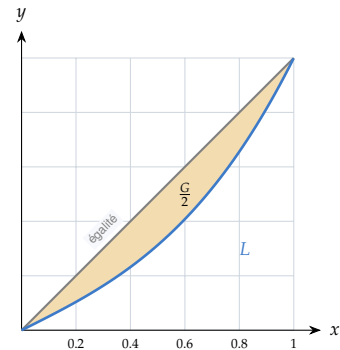
#### Indice (coefficient) de Gini

Double de l'aire entre la diagonale et la courbe de Lorenz :

$$G = 2 \int_0^1 (x - L(x)) \, dx = 1 - 2 \int_0^1 L(x) \, dx$$

$G \in [0;1]$  :  $G = 0$  égalité parfaite ;  $G$  proche de 1 : inégalité extrême.

France  $\approx 0,29$  États-Unis  $\approx 0,39$  Afrique du Sud  $\approx 0,63$ .



L'aire orange vaut  $\frac{G}{2}$ .

**Exemple** :  $L(x) = \frac{x^3 + x}{2}$  :  $\int_0^1 L = \frac{3}{8}$ , donc  $G = 1 - \frac{3}{4} = 0,25$ .

### 3. MÉTHODES TYPES

#### Vérifier une fonction de Lorenz

- calculer  $L(0)$  et  $L(1)$  ;
- signe de  $L'$  : croissante ;
- signe de  $x - L(x)$  (ou convexité : sous la corde).

#### Gini d'une fonction

- primitive de  $L$  ;
  - calcul de  $\int_0^1 L$  ;
  - $G = 1 - 2 \int_0^1 L$ .
- Ex. :  $L(x) = x^2$  :  $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$ ,  $G = \frac{1}{3}$ .

#### Gini d'une série (trapèzes)

Aire sous la ligne brisée : somme de trapèzes de largeur 0,2 :

$$\int_0^1 L \approx 0,2 \times \frac{3,10}{2} = 0,31$$

d'où  $G \approx 1 - 2 \times 0,31 = 0,38$ .

#### À RETENIR

Rapport interdécile  $\frac{D_9}{D_1}$  : plus il est grand, plus c'est inégal.

Lorenz : continue, croissante,  $L(0) = 0$ ,  $L(1) = 1$ ,  $L(x) \leq x$ .

Gini :  $G = 1 - 2 \int_0^1 L(x) \, dx$ .

$G = 0$  : égalité ;  $G \rightarrow 1$  : inégalité extrême.

Cumuler dans l'ordre croissant des revenus ; ne pas oublier le facteur 2.