

# Répartition des richesses, inégalités

Déciles, courbe de Lorenz, indice de Gini

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

## 1 Des outils statistiques

### Médiane, déciles, rapport interdécile

Les revenus d'une population étant rangés par ordre croissant :

- la **médiane**  $Me$  partage la population en deux moitiés ;
- le **premier décile**  $D_1$  est le revenu en dessous duquel se trouvent 10 % des individus ; le **neuvième décile**  $D_9$  celui en dessous duquel se trouvent 90 % des individus ;
- le **rapport interdécile**  $\frac{D_9}{D_1}$  mesure l'écart entre les « plus aisés » et les « plus modestes » : plus il est grand, plus la distribution est inégalitaire.

### Méthode

Exemple : En France (2021, niveau de vie annuel),  $D_1 \approx 12\,000$  € et  $D_9 \approx 40\,000$  € :

$$\frac{D_9}{D_1} \approx \frac{40\,000}{12\,000} \approx 3,3$$

Les 10 % les plus aisés ont un niveau de vie au moins 3,3 fois supérieur à celui des 10 % les plus modestes.

### Courbe de Lorenz (cas d'une série statistique)

On range la population par revenus croissants. Pour chaque fraction  $x$  de la population (les plus modestes), on note  $y$  la fraction du revenu total qu'elle perçoit.

La **courbe de Lorenz** relie les points  $(x; y)$ , de  $(0; 0)$  à  $(1; 1)$ .

- **Égalité parfaite** : chacun perçoit la même chose,  $y = x$  (la diagonale, ou « droite d'égalité »).
- Plus la courbe s'éloigne de la diagonale (vers le bas), plus la répartition est inégalitaire.

### Méthode — construire une courbe de Lorenz

Exemple : Répartition des revenus d'un pays par quintiles (tranches de 20 %) :

| Quintile                          | 1 <sup>er</sup> | 2 <sup>e</sup> | 3 <sup>e</sup> | 4 <sup>e</sup> | 5 <sup>e</sup> |
|-----------------------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Part du revenu total              | 5 %             | 10 %           | 15 %           | 25 %           | 45 %           |
| Part cumulée de la population $x$ | 0,2             | 0,4            | 0,6            | 0,8            | 1              |
| Part cumulée du revenu $y$        | 0,05            | 0,15           | 0,30           | 0,55           | 1              |

Lecture : les 60 % les plus modestes perçoivent 30 % du revenu total ; les 20 % les plus riches en perçoivent 45 %.

## 2 Des outils issus de l'analyse

### Fonction de Lorenz

Une **fonction de Lorenz** est une fonction  $L$  définie sur  $[0; 1]$  telle que :

$L$  continue et croissante sur  $[0; 1]$ ,  $L(0) = 0$ ,  $L(1) = 1$ ,  $L(x) \leq x$  pour tout  $x \in [0; 1]$ .

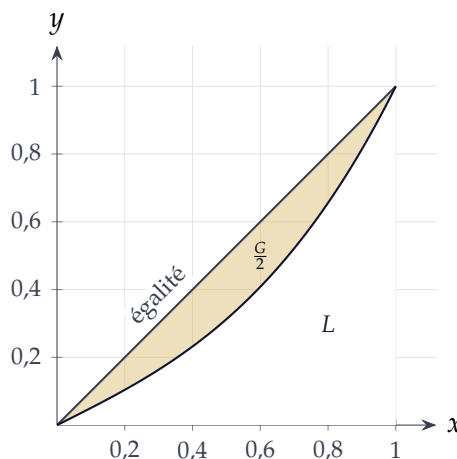
En pratique,  $L$  est aussi **convexe** : la part de revenu perçue par chaque tranche supplémentaire augmente (les tranches sont de plus en plus aisées).

### Indice (coefficient) de Gini

L'**indice de Gini** est le double de l'aire comprise entre la droite d'égalité et la courbe de Lorenz :

$$G = 2 \int_0^1 (x - L(x)) \, dx = 1 - 2 \int_0^1 L(x) \, dx$$

$G \in [0; 1]$  :  $G = 0$  correspond à l'égalité parfaite,  $G$  proche de 1 à une inégalité extrême (une seule personne perçoit tout).



La zone dorée a pour aire  $\frac{G}{2}$  ; le triangle sous la diagonale a pour aire  $\frac{1}{2}$ .

### Méthode — calculer un indice de Gini

Exemple :  $L(x) = \frac{x^3 + x}{2}$  sur  $[0; 1]$ . On vérifie :  $L(0) = 0$ ,  $L(1) = 1$ ,  $L'(x) = \frac{3x^2 + 1}{2} > 0$  (croissante),  $L''(x) = 3x \geq 0$  (convexe), et  $x - L(x) = \frac{x - x^3}{2} = \frac{x(1 - x^2)}{2} \geq 0$ .

$$\int_0^1 L(x) \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} \quad G = 1 - 2 \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Répartition peu inégalitaire (pour comparaison : France  $\approx 0,29$ , États-Unis  $\approx 0,39$ , Afrique du Sud  $\approx 0,63$ ).

### Méthode — Gini d'une série statistique (trapèzes)

Avec les quintiles du §1, la courbe de Lorenz est une ligne brisée : l'aire sous la courbe est une

somme d'aires de trapèzes de largeur 0,2 :

$$\int_0^1 L \approx 0,2 \times \frac{(0 + 0,05) + (0,05 + 0,15) + (0,15 + 0,30) + (0,30 + 0,55) + (0,55 + 1)}{2} = 0,31$$

D'où  $G \approx 1 - 2 \times 0,31 = 0,38$ .

### Comparer deux répartitions

Si la courbe de Lorenz  $L_1$  est partout au-dessus de  $L_2$ , la répartition 1 est moins inégalitaire et  $G_1 < G_2$ . Si les courbes se croisent, l'indice de Gini permet quand même de trancher, mais il résume la répartition en un seul nombre et perd de l'information.

### À retenir

- Rapport interdécile  $\frac{D_9}{D_1}$  : écart entre les 10 % les plus aisés et les 10 % les plus modestes.
- Fonction de Lorenz : continue, croissante,  $L(0) = 0$ ,  $L(1) = 1$ ,  $L(x) \leq x$  (en général convexe).
- Indice de Gini :  $G = 2 \int_0^1 (x - L(x)) dx = 1 - 2 \int_0^1 L(x) dx$ , entre 0 (égalité) et 1.
- **Piège** : on cumule les parts *dans l'ordre croissant des revenus*, et on oublie le facteur 2 dans  $G$  : la formule  $1 - 2 \int L$  évite l'erreur.