

Fonctions (II) — Dérivation et convexité

TERMINALE

1 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . On note u' sa dérivée.

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$au + b$	au'	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^2	$2u'u$	$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
u^3	$3u'u^2$	$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
u^n	$n u' u^{n-1}$	e^u	$u' e^u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n u'}{u^{n+1}}$

Méthode

Exemple : Dériver $f(x) = e^{3x+1}$ et $g(x) = (2x+1)^3$.

Pour f , avec $u(x) = 3x+1$ et $u'(x) = 3$: $f'(x) = 3e^{3x+1}$.

Pour g , avec $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$ et $n = 3$: $g'(x) = 3 \times 2 \times (2x+1)^2 = 6(2x+1)^2$.

2 Composition et dérivée d'une fonction composée

Définition

Soit u définie sur I à valeurs dans J , et v définie sur J . La **composée** $v \circ u$ est la fonction définie sur I par :

$$v \circ u : x \mapsto v(u(x)).$$

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} & J & \xrightarrow{v} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) & \mapsto & v(u(x)) \end{array}$$

Propriété — Dérivée d'une fonction composée

Si u est dérivable sur I et v dérivable sur J , alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u' \quad \text{c'est-à-dire} \quad (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x).$$

Méthode

Exemple : Dériver $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On pose $u(x) = x^2 + 1$ et $v(t) = \sqrt{t}$, donc $v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et $u'(x) = 2x$. Alors :

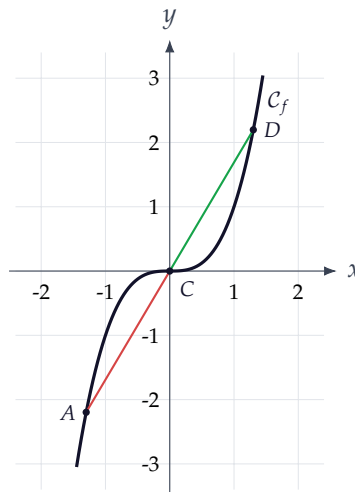
$$h'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3 Convexité et concavité

Définition

Soit f dérivable sur un intervalle I , de courbe $\mathcal{C}_f$.

- f est **convexe** sur I si, pour tout réel x de I , $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de ses cordes (et au-dessus de ses tangentes).
- f est **concave** sur I si, pour tout réel x de I , $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de ses cordes (et en dessous de ses tangentes).



Propriété — Preuve de la convexité

La convexité d'une fonction f (deux fois dérivable) peut se prouver par :

- les **sécantes** (cordes) ;
- les **tangentes** ;
- la **croissance de la dérivée** f' ;
- la **positivité de la dérivée seconde** f'' .

En pratique : f est convexe sur $I \iff f'' \geq 0$ sur I ; f est concave sur $I \iff f'' \leq 0$ sur I .

Méthode

Exemple : Étudier la convexité de $f(x) = x^3$.

On calcule $f'(x) = 3x^2$ puis $f''(x) = 6x$. On étudie le signe de f'' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité	<i>concave</i>		<i>convexe</i>

f est **concave** sur $] -\infty; 0]$ (où $f'' \leq 0$) et **convexe** sur $[0; +\infty[$ (où $f'' \geq 0$).

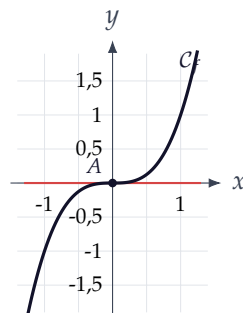
4 Point d'inflexion

Définition

Un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un **point d'inflexion** si la courbe **traverse** sa tangente T_A en ce point : la convexité change de part et d'autre de A .

Propriété

A d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' **s'annule en changeant de signe** en a .



Méthode

Exemple : Pour $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$ s'annule en 0 en changeant de signe (de $-$ à $+$). La courbe admet donc un **point d'inflexion** en $A(0;0)$.

À retenir

Dérivées composées : $(u^n)' = n u' u^{n-1}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(e^u)' = u' e^u$, et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

Convexité : f convexe $\iff f'' \geq 0$ (courbe au-dessus de ses tangentes) ; concave $\iff f'' \leq 0$.

Point d'inflexion : f'' s'annule en changeant de signe ; la courbe traverse sa tangente.