

Cinématique du point

TERMINALE

1 Référentiel, repère et vecteur position

Définition

Un **référentiel** est un solide de référence auquel on associe une **horloge**. Décrire un mouvement n'a de sens que dans un référentiel précisé : le même point peut être immobile dans l'un et en mouvement dans l'autre.

Définition

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la position du point M à l'instant t est donnée par le **vecteur position**

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

L'ensemble des positions successives constitue la **trajectoire**.

Les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les **équations horaires** du mouvement. En éliminant t entre elles, on obtient l'**équation de la trajectoire**, qui ne fait plus intervenir le temps.

2 Le vecteur vitesse

Définition

Le **vecteur vitesse** est la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}} \quad \text{soit} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

Propriété

Le vecteur vitesse est toujours **tangent à la trajectoire** et orienté dans le sens du mouvement. Sa norme, la vitesse instantanée, vaut

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{en m/s}$$

3 Le vecteur accélération

Définition

Le **vecteur accélération** est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} \quad \text{en m/s}^2$$

L'accélération traduit toute *variation* du vecteur vitesse : un changement de **norme** (on accélère ou on ralentit), mais aussi un simple changement de **direction**. Un mouvement circulaire à vitesse constante est donc accéléré — c'est le point le plus contre-intuitif du chapitre.

Méthode — Des équations horaires aux vecteurs

Un mobile a pour équations horaires, en unités du système international :

$$x(t) = 2,0 t^2 \quad y(t) = 4,0 t$$

1. On dérive chaque coordonnée pour obtenir la vitesse :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4,0 t \\ 4,0 \end{pmatrix}$$

2. On dérive à nouveau pour l'accélération :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4,0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur accélération est **constant**, dirigé selon $\vec{i}$.

3. À $t = 1,5 \text{ s}$: $v_x = 4,0 \times 1,5 = 6,0 \text{ m/s}$ et $v_y = 4,0 \text{ m/s}$, d'où

$$v = \sqrt{6,0^2 + 4,0^2} = \sqrt{52} = 7,2 \text{ m/s}$$

4. Équation de la trajectoire : on tire $t = y/4,0$ de la seconde équation et on le reporte dans la première.

$$x = 2,0 \left(\frac{y}{4,0} \right)^2 = \frac{y^2}{8,0}$$

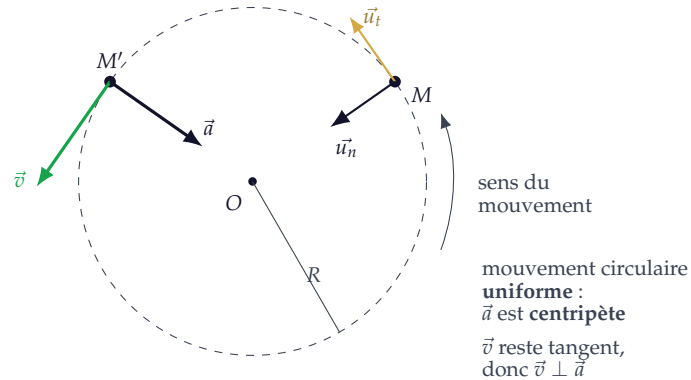
C'est une **parabole** d'axe horizontal.

4 Le repère de Frenet

Pour un mouvement circulaire, on abandonne le repère fixe au profit d'un repère *attaché au mobile*.

Définition

Le **repère de Frenet** $(M; \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est constitué de deux vecteurs unitaires : $\vec{u}_t$ **tangent** à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement, et $\vec{u}_n$ **normal**, dirigé vers le centre du cercle.

**Propriété**

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon R :

$$\vec{v} = v \vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$$

La composante tangentielle traduit la variation de la *vitesse*, la composante normale la variation de la *direction*.

Si le mouvement est **uniforme**, $\frac{dv}{dt} = 0$: il ne reste que $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$, de norme constante et toujours dirigée vers le centre.

Méthode — Mouvement circulaire uniforme

Une nacelle de manège décrit un cercle de rayon $R = 6,0 \text{ m}$ en effectuant un tour complet en $T = 12 \text{ s}$.

1. La vitesse est la longueur du cercle divisée par la durée d'un tour :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 6,0}{12} = 3,1 \text{ m/s}$$

2. Le mouvement étant uniforme, l'accélération est purement normale :

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{3,1^2}{6,0} = 1,6 \text{ m/s}^2$$

3. Interprétation : bien que la vitesse ne change pas en valeur, sa *direction* tourne en permanence. Le passager est poussé vers l'extérieur de son siège parce que celui-ci le pousse, lui, vers le centre.

5 Caractériser un mouvement

Propriété

Mouvement	Trajectoire	Vecteur accélération
Rectiligne	droite	colinéaire à la trajectoire
Rectiligne uniforme	droite	$\vec{a} = \vec{0}$
Rectiligne uniformément varié	droite	constant, colinéaire à $\vec{v}$
Circulaire	cercle	deux composantes de Frenet
Circulaire uniforme	cercle	centripète, norme v^2/R constante

Accéléré ou ralenti ? Il suffit de comparer les sens de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$: s'ils pointent dans le *même* sens, le mouvement est accéléré ; s'ils sont opposés, il est ralenti ; s'ils sont perpendiculaires, la vitesse garde une norme constante.

6 Exploiter une chronophotographie

Principe. Une caméra enregistre les positions successives du mobile à intervalle de temps constant τ . On mesure les abscisses, puis on approche les dérivées par des **différences finies** :

$$\vec{v}_i \approx \frac{M_{i-1}M_{i+1}}{2\tau} \quad \vec{a}_i \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\tau}$$

La vitesse en un point se calcule donc avec les positions *encadrantes*, jamais avec le point lui-même.



Méthode — Vitesse et accélération à partir des mesures

Positions relevées sur l'axe, en centimètres :

Point	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$x \text{ (cm)}$	0	2,0	6,0	12,0	20,0	30,0

1. Vitesse en M_1 , avec $\tau = 100 \text{ ms} = 0,100 \text{ s}$:

$$v_1 = \frac{x_2 - x_0}{2\tau} = \frac{6,0 - 0}{2 \times 0,100} = 30 \text{ cm/s} = 0,30 \text{ m/s}$$

2. De la même façon : $v_2 = 0,50 \text{ m/s}$, $v_3 = 0,70 \text{ m/s}$ et $v_4 = 0,90 \text{ m/s}$. La vitesse augmente de $0,20 \text{ m/s}$ à chaque intervalle.

3. Accélération en M_2 :

$$a_2 = \frac{v_3 - v_1}{2\tau} = \frac{0,70 - 0,30}{0,200} = 2,0 \text{ m/s}^2$$

4. En M_3 : $a_3 = \frac{0,90 - 0,50}{0,200} = 2,0 \text{ m/s}^2$. L'accélération est **constante** : le mouvement est

rectiligne uniformément accéléré .

5. Contrôle : $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ont le même sens, le mouvement est bien accéléré. ✓

Aux extrémités, on ne peut rien calculer : v_0 et v_5 n'ont pas de point encadrant. C'est la limite de la méthode des différences finies — et une question classique en évaluation.

À retenir

- $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$: on dérive coordonnée par coordonnée.
- $\vec{v}$ est toujours **tangent** à la trajectoire.
- **Frenet** (mouvement circulaire) : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$; si le mouvement est uniforme, $\vec{a}$ est **centripète** de norme v^2/R .
- **Chronophotographie** : $\vec{v}_i \approx \frac{\vec{M}_{i-1}M_{i+1}}{2\tau}$ — on utilise les points *encadrants*.
- $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de même sens $\Rightarrow$ accéléré ; de sens opposés $\Rightarrow$ ralenti ; perpendiculaires $\Rightarrow$ norme de v constante.
- **Piège** : « vitesse constante » ne veut pas dire « accélération nulle ». Il faut que le *vecteur* vitesse soit constant, direction comprise.