

Espace (I) — Vecteurs, droites et plans

TERMINALE

1 Droite de l'espace

Définition

Une droite de l'espace est définie :

- soit par **deux points distincts** A et B ;
- soit par un **point** A et un **vecteur directeur** non nul $\vec{u}$.



2 Plan de l'espace

Définition

Un plan de l'espace est défini :

- soit par **trois points non alignés** A , B et C ;
- soit par un **point** A et **deux vecteurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

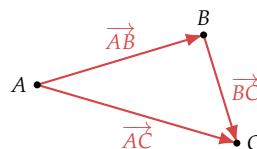


3 Relation de Chasles

Propriété

Pour trois points A , B et C de l'espace :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$



4 Base, repère et coordonnées

Définition

Un vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Définition

Un **repère** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est formé :

- d'une **origine** O ;
- d'une **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, c'est-à-dire de trois vecteurs qui ne sont pas combinaison linéaire les uns des autres (non coplanaires).

Tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, avec x, y, z réels.

Propriété

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Méthode

Exemple : Avec $A(1; 2; 3)$ et $B(4; 0; 5)$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 2 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

5 Colinéarité, coplanarité et positions relatives

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (coordonnées proportionnelles).

Trois vecteurs sont **coplanaires** si l'un est combinaison linéaire des deux autres.

Propriété — Positions relatives

- **Deux droites** d et d' : coplanaires (sécantes ou parallèles, éventuellement confondues) ou non coplanaires.
- **Une droite** d **et un plan** $\mathcal{P}$: strictement parallèles, d incluse dans $\mathcal{P}$, ou sécants en un point M .
- **Deux plans** $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$: strictement parallèles, confondus, ou sécants selon une droite d .

Méthode

Exemple : Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ vérifient $\vec{v} = -2\vec{u}$: ils sont **colinéaires**, donc les droites qu'ils dirigent sont parallèles.

À retenir

Droite : définie par 2 points ou 1 point + 1 vecteur directeur.

Plan : défini par 3 points non alignés ou 1 point + 2 vecteurs non colinéaires.

Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; **coordonnées :** $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Colinéaires : $\vec{v} = k\vec{u}$; **coplanaires :** $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.