

CALCULS D'AIRES

— TERMINALE — MATHS COMPLÉMENTAIRES —

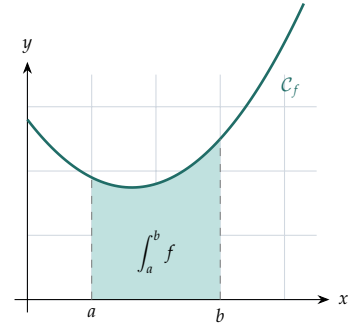
1. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

Si f est **continue et positive** sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'**aire** du domaine compris entre C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$, en **unités d'aire** (u.a.).

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f .

Exemples : $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9 \text{ u.a.}$ $\int_0^2 e^{0,5x} dx = 2e - 2 \approx 3,44.$



2. CAS GÉNÉRAL

Pour f continue de signe quelconque, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Si $f \leq 0$ sur $[a; b]$, l'intégrale est l'**opposé** de l'aire.

Propriétés

- **Linéarité** : $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$;
- **Chasles** : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$;
- **Positivité** : $f \geq 0$ et $a \leq b \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$; $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Aire entre deux courbes (si $f \geq g$ sur $[a; b]$)

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Ex. : entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0; 1]$: $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$

Valeur moyenne de f sur $[a; b]$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

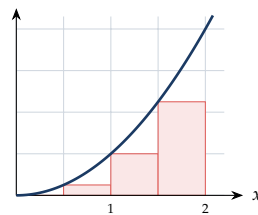
Hauteur du rectangle de base $[a; b]$ de même aire.

3. CALCULS D'AIRES : MÉTHODE DES RECTANGLES

On découpe $[a; b]$ en n intervalles de largeur $h = \frac{b-a}{n}$ et on additionne des aires de rectangles :

$$S_n = h[f(x_0) + \dots + f(x_{n-1})]$$

avec $x_k = a + kh$. Quand n augmente, $S_n \rightarrow \int_a^b f$.



x^2 sur $[0; 2]$, $n = 4$: $S_4 = 1,75$.

En Python

```
def rectangles(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + h*f(a + k*h)
    return S
```

$n = 1000$: 2,663 (exact : $\frac{8}{3} \approx 2,667$).

4. MÉTHODES TYPES

Calculer une aire

1. étudier le **signe** de f sur $[a; b]$;
2. trouver une primitive F ;
3. calculer $F(b) - F(a)$;
4. convertir en cm^2 si l'unité d'aire est donnée.

Aire entre deux courbes

1. résoudre $f(x) = g(x)$: bornes ;
 2. signe de $f - g$: qui est au-dessus ?
 3. intégrer « dessus – dessous ».
- Ex. : $y = x^2$ et $y = 2x + 3$ se coupent en -1 et 3 ; aire = $\frac{32}{3} \text{ u.a.}$

Valeur moyenne

Température $T(t) = -0,1t^2 + 2,4t + 5$ sur $[0; 24]$:

$$\mu = \frac{1}{24} \int_0^{24} T(t) dt = 14,6^\circ\text{C}$$

Elle est toujours comprise entre le minimum et le maximum de f .

À RETENIR

☉ $f \geq 0$: $\int_a^b f = \text{aire}$ sous la courbe (u.a.).

⌚ $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, F primitive de f .

⚙️ Linéarité, Chasles, positivité.

📊 Valeur moyenne $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$; aire entre courbes $\int (f - g)$.

💡 Si f change de signe, l'intégrale n'est pas l'aire.