

Calculs d'aires

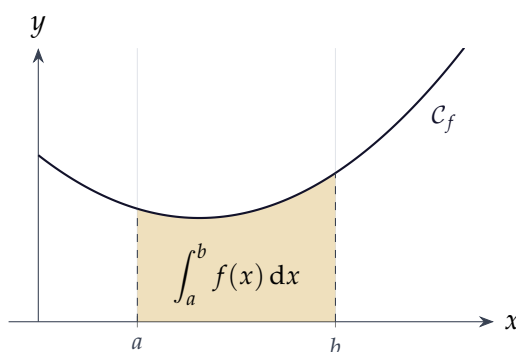
Intégrale, primitives, valeur moyenne, méthode des rectangles

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Intégrale et aire sous la courbe

Soit f continue et **positive** sur $[a; b]$. L'**intégrale** de f de a à b , notée $\int_a^b f(x) dx$, est l'**aire** (en unités d'aire, u.a.) du domaine compris entre C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle construit sur les unités des deux axes.



Calcul à l'aide d'une primitive

Si f est continue sur $[a; b]$ et F est une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode

Exemple : Aire sous la parabole $y = x^2$ entre 0 et 3 : une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$.

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9 \text{ u.a.}$$

Exemple : $\int_0^2 e^{0,5x} dx = \left[2e^{0,5x} \right]_0^2 = 2e - 2 \approx 3,44$.

2 Cas général

Définition

Pour f continue sur un intervalle I contenant a et b (de signe quelconque), on **définit**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f.$$

Si f est **négative** sur $[a; b]$, l'intégrale est l'**opposé** de l'aire : on parle d'aire algébrique.

Propriétés de l'intégrale

Pour f, g continues, λ réel :

- **Linéarité** : $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.
- **Relation de Chasles** : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.
- **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ ($a \leq b$), alors $\int_a^b f \geq 0$; si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Aire entre deux courbes et valeur moyenne

- Si $f \geq g$ sur $[a; b]$, l'aire entre les deux courbes vaut $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.
- La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ ($a < b$) est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$: c'est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ ayant la même aire.

Méthode — aire entre deux courbes

Exemple : Aire entre $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur $[0; 1]$. Sur $[0; 1]$, $x^2 \leq x$ donc $f \geq g$:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

Méthode — valeur moyenne

Exemple : La température (en °C) d'une journée est modélisée par $T(t) = -0,1t^2 + 2,4t + 5$ pour $t \in [0; 24]$ (heures). Température moyenne :

$$\mu = \frac{1}{24} \int_0^{24} T(t) dt = \frac{1}{24} \left[-\frac{0,1t^3}{3} + 1,2t^2 + 5t \right]_0^{24} = \frac{1}{24} (-460,8 + 691,2 + 120) = 14,6 \text{ °C}$$

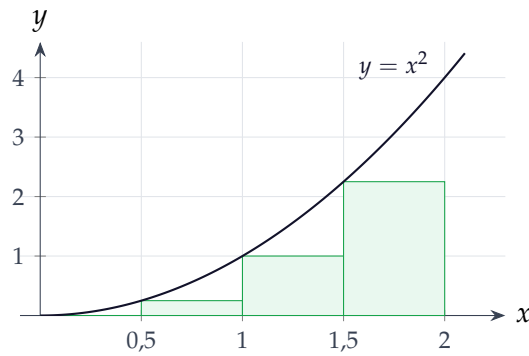
3 Calculs d'aires : méthode des rectangles

Principe

Quand on ne connaît pas de primitive, on **approche** l'aire en découpant $[a; b]$ en n intervalles de même largeur $h = \frac{b-a}{n}$ et en sommant des aires de rectangles :

$$S_n = h[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] \quad \text{avec } x_k = a + kh \quad (\text{rectangles « à gauche »}).$$

Quand n augmente, S_n se rapproche de $\int_a^b f(x) dx$.



Rectangles à gauche pour $f(x) = x^2$ sur $[0; 2]$ avec $n = 4$: $S_4 = 0,5 (0 + 0,25 + 1 + 2,25) = 1,75$.

Méthode — programmer la méthode des rectangles

```
def rectangles(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + h * f(a + k*h)
    return S
```

Pour $f(x) = x^2$ sur $[0; 2]$ (valeur exacte $\frac{8}{3} \approx 2,667$) :

n	4	100	1000
S_n	1,75	2,627	2,663

f étant croissante, les rectangles à gauche donnent une valeur **par défaut**.

À retenir

- $f \geq 0$: $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire sous la courbe, en u.a.
- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, avec F primitive de f .
- Linéarité, Chasles, positivité ; aire entre deux courbes $\int_a^b (f - g)$ si $f \geq g$.
- Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
- **Piège** : si f change de signe, l'intégrale n'est pas l'aire : on découpe avec Chasles et on change le signe des morceaux négatifs.